אלכס זיו

מתמטיקה
המדריך המלא לפתרון תרגילים

טריגונומטריה

לתלמידי 4 ו- 5 יחידות לימוד

כ-350 תרגילים עם פתרונות מלאים

הקדמה

ספר זה הוא חלק מסדרת ספרים "המדריך המלא לפתרון תרגילים". הסדרה מיועדת לשימוש כהשלמה לכל ספר לימוד מקובל. כל ספר בסדרה כולל בתוכו מגוון רחב של תרגילים המלווים בהסברים ובפתרונות מלאים ומפורטים כדי להתאים לצרכים רבים יותר ולהיות יעיל כספר עזר.

ספר זה מיועד לתלמידי 4 ו- 5 יח"ל הניגשים לשאלונים 35804 – 35807.
הוא מכסה את כל החומר היסודי בטריגונומטריה ומקנה טכניקות יעילות לפתרון בעיות.
כל פרק פותח בהצגה ברורה של הגדרות, משפטים ונוסחאות בשילוב הבהרות. תשומת לב רבה הוקדשה לשיבוץ התרגילים בכל נושא לפי דרגות קושי. התרגילים המסומנים ב- * הם תרגילים יותר קשים ואתגריים. התרגילים הפתורים משמשים לפישוט והבהרה של תיאוריה ומאפשרים לתלמיד לרכוש ידע, מיומנות וביטחון עצמי שחשובים מאוד להצלחה.

תודה מיוחדת לבארי ז'בוטובסקי שעזר רבות בהכנת ספר זה, העיר הערות חשובות והארות מועילות.

תודה למורים צביה פורת, רומן דורפמן, ורה יונובה שבדקו את הספר מבחינה מקצועית ותרמו רבות מהידע שלהם.

בברכה ובהכרת טובה אקבל כל הערה והארה.

אלכס זיו

E-mail: azbooks@walla.com

תוכן עניינים

פרק 1: מושגי יסוד וזהויות

פרק 2: משוואות טריגונומטריות

פרק 3: בעיות טריגונומטריות במישור

פרק 4: בעיות טריגונומטריות במרחב

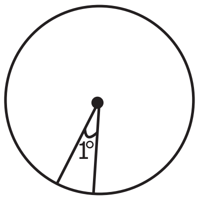
* הנושאים המסומנים באדום אינם כלולים בשאלוני בגרות של 4 ו-5 יח"ל (שאלונים 35805 ו- 35807).

** הנושאים הבאים: הזווית בין שני מישורים, השימוש במשפט הסינוסים או במשפט הקוסינוסים בגופים במרחב אינם כלולים בשאלון 35805 (4 יח"ל).

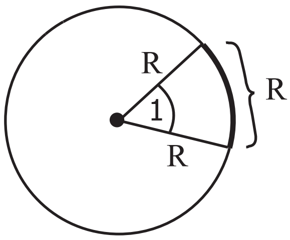
פרק 1: מושגי יסוד וזהויות

מושגי יסוד

הגדרה
זווית בת מעלה אחת (1°) היא הזווית המרכזית במעגל הנשענת על קשת שהיא $\frac{1}{360}$ מאורך היקף המעגל.



הגדרה
זווית מרכזית במעגל, הנשענת על קשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל, נקראת זווית בת **רדיאן** אחד.



ידוע כי היקף מעגל שרדיוסו R הוא $2\pi R$ $(\pi \approx 3.14)$, לכן בסיבוב מלא יש 2π רדיאנים (או 360°). לפיכך מתקיים 2π רדיאנים $= 360^\circ$, מכאן π רדיאנים $= 180^\circ$.
אם α° מסמנת את הזווית במעלות ו-γ מסמנת את אותה הזווית ברדיאנים, מתקיימת הפרופורציה $\boxed{\frac{\gamma}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}$. מהפרופורציה הנ"ל נוכל לקבל נוסחאות מעבר:

$$\boxed{\alpha^\circ = \frac{\gamma}{\pi} \cdot 180^\circ}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \text{ רדיאנים}}$$

1.01
חשב את גודלן של הזוויות הבאות ברדיאנים:
א. 30° ב. 45° ג. 60° ד. 108°

<u>תשובה:</u> א. $\frac{\pi}{6}$.   ב. $\frac{\pi}{4}$.   ג. $\frac{\pi}{3}$.   ד. $\frac{3\pi}{5}$.

1.02
רשום במעלות את הזוויות הבאות הנתונות ברדיאנים:

א. $\frac{2\pi}{3}$ ב. $\frac{3\pi}{4}$ ג. 1.5

<u>תשובה:</u> א. $120°$. ב. $135°$. ג. $85.99°$.

אורך קשת

לפי הגדרת הרדיאן, הזווית המרכזית שגודלה 1 רדיאן, מתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס R של המעגל. לפיכך הזווית המרכזית שגודלה γ רדיאן מתאימה לקשת שאורכה γR:

$$\boxed{\mathbf{L = \gamma \cdot R}}$$

L – אורך הקשת.
R – רדיוס המעגל.
γ – הזווית המרכזית ברדיאנים.

אורך הקשת המתאימה לזווית בת $\alpha°$ הוא: $\boxed{\mathbf{L = \frac{\pi R \alpha°}{180°}}}$

1.03
נתונה זווית מרכזית (ברדיאנים) במעגל שרדיוסו $R =$ 3ס"מ .
חשב את אורך הקשת המתאימה לזווית:

א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{5}{9}\pi$ ג. 2.7

<u>תשובה:</u> א. 1.57 ס"מ. ב. 5.23 ס"מ. ג. 8.1 ס"מ.

1.04
נתונה זווית מרכזית (במעלות) במעגל שרדיוסו $R =$ 2.2ס"מ .
חשב את אורך הקשת המתאימה לזווית:
א. $\alpha = 45°$ ב. $\alpha = 72°$ ג. $\alpha = 154°$

<u>תשובה:</u> א. 1.727 ס"מ. ב. 2.763 ס"מ. ג. 5.91 ס"מ.

1.05
אורך הקשת הוא 5.4 ס"מ. חשב את הזווית המרכזית (ברדיאנים) המתאימה לקשת הנתונה, אם רדיוס המעגל הוא $R =$ 3.6ס"מ .

<u>תשובה:</u> 1.5.

1.06

אורך הקשת הוא 3.2 ס"מ. חשב את הזווית המרכזית (במעלות) המתאימה לקשת הנתונה, אם רדיוס המעגל הוא $R = 2$ ס"מ.

<u>תשובה:</u> $91.72°$.

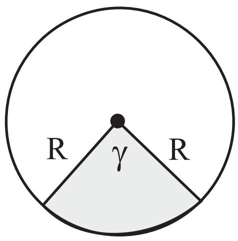
שטח גזרה

שטח העיגול ניתן באמצעות הנוסחה $\boxed{S = \pi R^2}$. ידוע כי בסיבוב מלא יש 2π רדיאנים, לכן

שטח הגזרה המתאימה לזווית מרכזית בת 1 רדיאן הוא: $S = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{R^2}{2}$

ולכן שטח הגזרה המתאימה לזווית מרכזית בת γ רדיאן הוא: $\boxed{S = \frac{R^2 \cdot \gamma}{2}}$

S – שטח הגזרה.
R – רדיוס המעגל.
γ – הזווית המרכזית ברדיאנים.



שטח הגזרה המתאימה לזווית מרכזית בת $\alpha°$ הוא: $\boxed{S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha°}{360°}}$

1.07

נתונה זווית מרכזית (ברדיאנים) במעגל שרדיוסו $R = 5$ ס"מ. חשב את שטח הגזרה המתאימה לזווית: א. $\frac{2\pi}{3}$ ב. 1.8

<u>תשובה:</u> א. 26.17 סמ"ר. ב. 22.5 סמ"ר.

1.08

נתונה זווית מרכזית (במעלות) במעגל שרדיוסו $R = 5$ ס"מ. חשב את שטח הגזרה המתאימה לזווית: א. $84°$ ב. $38°$

<u>תשובה:</u> א. 18.32 סמ"ר. ב. 8.29 סמ"ר.

1.09

רדיוס של גזרה הוא $R = 6$ ס"מ ושטחה 15 סמ"ר. חשב את אורך הקשת של הגזרה.

<u>תשובה:</u> 5 ס"מ.

1.10

אורך הקשת של גזרה הוא $\frac{2\pi}{5}$ ס"מ ושטחה הוא $\frac{4\pi}{5}$ סמ"ר. חשב את רדיוס הגזרה ואת הזווית המרכזית של הגזרה.

<u>תשובה:</u> $R = 4$ ס"מ , $\gamma = \frac{\pi}{10}$.

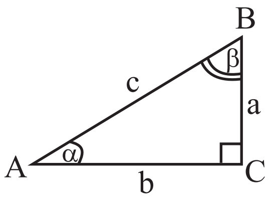
הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות לגבי זווית חדה במשולש ישר–זווית

הערה: הגדרות ותכונות הבאות נכונות גם לזוויות הנתונות במעלות וגם לזוויות הנתונות ברדיאנים.

במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$

נסמן: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

להלן נביא הגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר-זווית.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{הניצב ליד הזווית}}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{הניצב מול הזווית}}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

נתבונן במשולש שבציור הנ"ל ונביע את $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\tan\beta$ ו-$\cot\beta$ באמצעות a, b ו-c.

לפי ההגדרות של פונקציות טריגונומטריות נקבל:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{הניצב ליד הזווית}}$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{הניצב מול הזווית}}$$

קל לראות את הקשרים הבאים:

$$\sin\beta = \cos\alpha \;;\quad \cos\beta = \sin\alpha \;;\quad \tan\beta = \cot\alpha \;;\quad \cot\beta = \tan\alpha$$

במשולש ישר-זווית $\alpha + \beta = 90^\circ$, מכאן $\beta = 90^\circ - \alpha$. לכן מתקיים:

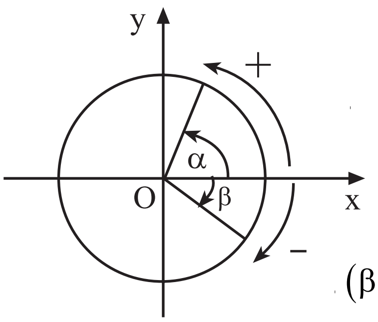
$$\boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha} \qquad \boxed{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha}$$

$$\boxed{\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha} \qquad \boxed{\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

הערה הגדרות הנ"ל מתייחסות רק לזוויות חדות. בהמשך נראה שאפשר להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות גם לזוויות קהות וגם לזווית המוגדרות כזוויות שליליות.

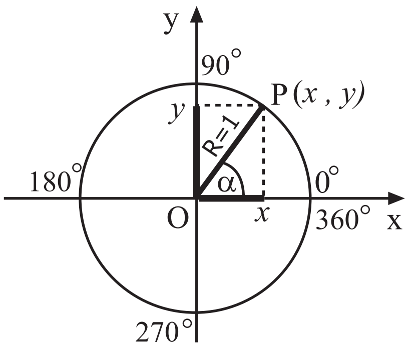
הרחבת הגדרות של הפונקציות הטריגונומטריות על-ידי מעגל היחידה

הגדרה המעגל שרדיוסו $R = 1$ ומרכזו בראשית הצירים, נקרא מעגל היחידה.



זווית במעגל היחידה: קודקוד הזווית נמצא בראשית הצירים $(0, 0)$, קרן אחת מתלכדת עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, והקרן השנייה של הזווית היא קרן ניידת. כאשר הקרן הניידת נעה נגד כיוון השעון, מתקבלת זווית חיובית, וכאשר היא נעה עם כיוון מחוגי השעון, מתקבלת זווית שלילית.

בציור, α היא זווית חיובית $(\alpha > 0)$, β היא זווית שלילית $(\beta < 0)$.



נגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות לזוויות שאינן בהכרח חדות.

לכל זווית מרכזית α במעגל היחידה מתאימה נקודה אחת ויחידה על המעגל (נקודת החיתוך של הקרן הניידת עם המעגל). נסמנה $P(x, y)$ (ראה ציור). שיעוריה של הנקודה מקיימים:

$$\frac{x}{R} = \cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{1} = \cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{x = \cos\alpha}$$

$$\frac{y}{R} = \sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{1} = \sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{y = \sin\alpha}$$

לזווית המרכזית $\alpha = 0°$ (*הקרן הניידת מתלכדת עם הכיוון החיובי של ציר ה- x*) מתאימה הנקודה $P(1, 0)$. זאת אומרת, $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$.
לזווית המרכזית $\alpha = 90°$ (*הקרן הניידת מתלכדת עם הכיוון החיובי של ציר ה- y*) מתאימה הנקודה $P(0, 1)$. כלומר, $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$.
לזווית המרכזית $\alpha = 180°$ (*הקרן הניידת מתלכדת עם הכיוון השלילי של ציר ה- x*) מתאימה הנקודה $P(-1, 0)$. דהיינו, $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$.
לזווית המרכזית $\alpha = 270°$ (*הקרן הניידת מתלכדת עם הכיוון השלילי של ציר ה- y*) מתאימה הנקודה $P(0, -1)$. כלומר, $\cos 270° = 0$, $\sin 270° = -1$.

מהגדרתו של מעגל היחידה נובע כי $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. לכן לכל זווית α מתקיים:
$-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-1 \le \sin\alpha \le 1$.
נוסף על כך, במעגל היחידה היחס בין שיעור ה- y לשיעור ה- x של הנקודה P, שווה לטנגנס הזווית α. היחס בין שיעור ה- x לבין שיעור ה- y שווה לקוטנגנס הזווית α, דהיינו:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{y}{x}} \quad (x \ne 0) \quad , \quad \boxed{\cot\alpha = \frac{x}{y}} \quad (y \ne 0)$$

תחום הערכים של טנגנס וקוטנגנס הוא: $-\infty < \cot\alpha < \infty$, $-\infty < \tan\alpha < \infty$.

מהגדרות של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ ניתן לראות את הקשרים הבאים:

$$\boxed{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות

נרכז בטבלה את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדרת	0	לא מוגדרת	0
cotα	לא מוגדרת	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	לא מוגדרת	0	לא מוגדרת

חיוביות ושליליות של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$

על-ידי התבוננות במעגל היחידה נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות הטריגונומטריות.

* ברביע הראשון $(0° < \alpha < 90°)$ מתקיים: $x > 0$, $y > 0$, לכן
$\sin\alpha > 0,\ \ \cos\alpha > 0\ ,\ \ \tan\alpha > 0,\ \ \cot\alpha > 0$

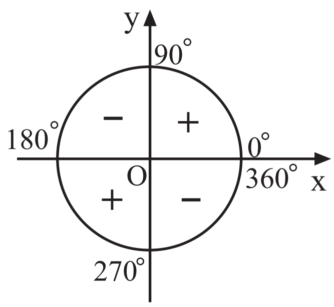
* ברביע השני $(90° < \alpha < 180°)$ מתקיים: $x < 0$, $y > 0$, מכאן
$\sin\alpha > 0\ ,\ \ \cos\alpha < 0,\ \ \tan\alpha < 0,\ \ \cot\alpha < 0$

* ברביע השלישי $(180° < \alpha < 270°)$ מתקיים: $x < 0$, $y < 0$, לפיכך
$\sin\alpha < 0\ ,\ \ \cos\alpha < 0\ ,\ \ \tan\alpha > 0\ ,\ \ \cot\alpha > 0$

* ברביע הרביעי $(270° < \alpha < 360°)$ מתקיים: $x > 0$, $y < 0$, לכן
$\sin\alpha < 0\ ,\ \ \cos\alpha > 0\ ,\ \ \tan\alpha < 0\ ,\ \ \cot\alpha < 0$

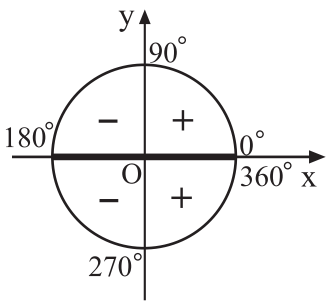
בציורים הנ"ל ניתן לראות את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות הטריגונומטריות.

טנגנס , קוטנגנס:



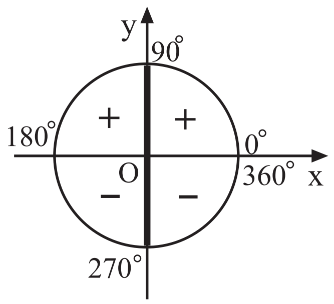
tanα, cotα

קוסינוס:



cosα

סינוס:



sinα

זהויות טריגונומטריות

ייצוג של פונקציות טריגונומטריות בעזרת זווית חדה

כל זווית β הנתונה במעלות ניתן להציג בצורה הבאה: $\beta = 90°n \pm \alpha$, כאשר n מספר שלם ו- α זווית חדה. אם הזווית נתונה ברדיאנים, אז ניתן להציג אותה בצורה $\beta = \frac{\pi}{2} \cdot n \pm \alpha$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ו- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

כדי להציג פונקציות $\sin(90°n \pm \alpha)$, $\cos(90°n \pm \alpha)$, $\tan(90°n \pm \alpha)$, $\cot(90°n \pm \alpha)$ באמצעות פונקציה טריגונומטרית של זווית חדה α, נוח להשתמש בכלל הבא:

כלל	
א.	אם n מספר אי-זוגי, אזי שם הפונקציה סינוס משתנה לקוסינוס, קוסינוס משתנה לסינוס, טנגנס משתנה לקוטנגנס, וקוטנגנס משתנה לטנגנס. אם n מספר זוגי, אזי שם הפונקציה איננו משתנה.
ב.	הסימן של הפונקציה המתקבלת (פונקציה של זווית חדה) זהה לסימנה של הפונקציה המקורית ברביע שבו "מסתיימת" הזווית המקורית.

דוגמה 1

הצג את הפונקציה $\sin(90°n - \alpha)$ באמצעות פונקציה טריגונומטרית של זווית חדה α כאשר:

א. $n = 1$ **ב.** $n = 2$ **ג.** $n = 3$ **ד.** $n = 4$

פתרון:

א. עבור $n = 1$ הפונקציה המקורית היא $\sin(90° - \alpha)$. $n = 1$ הוא מספר אי-זוגי, לכן שם הפונקציה המקורית סינוס משתנה לשם קוסינוס.
α היא זווית חדה, לפיכך הזווית $(90° - \alpha)$ "מסתיימת" ברביע הראשון. הפונקציה המקורית סינוס חיובית ברביע הראשון, לכן הפונקציה המתקבלת גם היא חיובית. לפיכך נקבל: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

ב. עבור $n=2$ הפונקציה המקורית היא $\sin\left(180°-\alpha\right)$. $n=2$ הוא מספר זוגי, לכן שם הפונקציה אינו משתנה.
α היא זווית חדה, מכאן הזווית $(180°-\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השני שבו הפונקציה סינוס חיובית לכן נקבל: $\sin\left(180°-\alpha\right)=\sin\alpha$.

ג. כאשר $n=3$ הפונקציה המקורית היא $\sin\left(270°-\alpha\right)$. $n=3$ מספר אי-זוגי, לפיכך השם סינוס של הפונקציה המקורית משתנה לקוסינוס.
α היא זווית חדה, לכן הזווית $(270°-\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השלישי, שבו סינוס שלילי ולכן הפונקציה המתקבלת (קוסינוס) גם תהיה שלילית. כלומר מתקיים:
$\sin(270°-\alpha)=-\cos\alpha$.

ד. עבור $n=4$ הפונקציה המקורית היא $\sin\left(360°-\alpha\right)$. $n=4$ הוא מספר זוגי , לכן שם הפונקציה אינו משתנה.
α היא זווית חדה, מכאן הזווית $(360°-\alpha)$ "מסתיימת" ברביע הרביעי, שבו סינוס שלילי. לפיכך נקבל: $\sin\left(360°-\alpha\right)=-\sin\alpha$.

דוגמה 2

הצג את הפונקציה $\cos(90°n+\alpha)$ באמצעות פונקציה טריגונומטרית של זווית חדה α,
כאשר: א. $n=1$ ב. $n=2$ ג. $n=3$ ד. $n=5$

פתרון:

א. עבור $n=1$ הפונקציה המקורית היא $\cos(90°+\alpha)$. $n=1$ הוא מספר אי-זוגי, לכן השם קוסינוס של הפונקציה משתנה לסינוס.
α היא זווית חדה, לפיכך הזווית $(90°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השני שבו קוסינוס שלילי, לכן הפונקציה המתקבלת גם תהיה שלילית. מכאן קיבלנו:
$\cos\left(90°+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

ב. כאשר $n=2$ הפונקציה המקורית היא $\cos\left(180°+\alpha\right)$. $n=2$ הוא מספר זוגי, לכן השם המקורי קוסינוס איננו משתנה.
הזווית $(180°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השלישי שבו קוסינוס שלילי. מכאן שהפונקציה המתקבלת גם היא תהיה שלילית. לפיכך מתקיים: $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$.

ג. עבור $n=3$ הפונקציה המקורית היא $\cos(270°+\alpha)$. $n=3$ הוא מספר אי-זוגי, לכן השם המקורי קוסינוס משתנה לסינוס.
הזווית $(270°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע הרביעי שבו קוסינוס חיובי, לפיכך הפונקציה המתקבלת גם תהיה חיובית. כלומר, $\cos\left(270°+\alpha\right)=\sin\alpha$.

ד. כאשר $n=5$ הפונקציה המקורית היא $\cos\left(450°+\alpha\right)$. $n=5$ הוא מספר אי-זוגי, לפיכך השם המקורי קוסינוס משתנה לסינוס.
הזווית $(450°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השני (*כי* $450°+\alpha=360°+90°+\alpha$. *הזווית* $360°$ *היא סיבוב מלא, והזווית* $90°+\alpha$ *"מסתיימת" ברביע השני*).
הפונקציה המקורית קוסינוס שלילית ברביע השני, מכאן שהפונקציה המתקבלת אף היא שלילית. כתוצאה מכך נקבל: $\cos\left(450°+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

דוגמה 3

הצג את הפונקציה $\tan\left(90°n+\alpha\right)$ באמצעות פונקציה טריגונומטרית של זווית חדה α,

כאשר: **א.** $n=-2$. **ב.** $n=1$. **ג.** $n=4$

פתרון:

א. עבור $n=-2$ הפונקציה המקורית היא $\tan\left(-180°+\alpha\right)$. $n=-2$ הוא מספר זוגי, לכן השם המקורי טנגנס איננו משתנה.
הזווית $(-180°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השלישי שבו טנגנס חיובי, לפיכך הפונקציה המתקבלת גם תהיה חיובית. אי לכך מתקיים: $\tan\left(-180°+\alpha\right)=\tan\alpha$.

ב. כאשר $n=1$ הפונקציה המקורית היא $\tan\left(90°+\alpha\right)$. $n=1$ הוא מספר אי-זוגי, לכן השם המקורי טנגנס משתנה לקוטנגנס. הזווית $(90°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השני שבו טנגנס שלילי מכאן שהפונקציה המתקבלת גם תהיה שלילית. לפיכך נקבל:

$$\tan\left(90°+\alpha\right)=-\cot\alpha \quad \text{או} \quad \tan\left(90°+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}.$$

ג. עבור $n=4$ הפונקציה המקורית היא $\tan\left(360°+\alpha\right)$. $n=4$ הוא מספר זוגי, לפיכך השם המקורי טנגנס איננו משתנה.
הזווית $(360°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע הראשון שבו טנגנס חיובי ומכך נובע שהפונקציה המתקבלת גם חיובית. לכן מתקיים: $\tan\left(360°+\alpha\right)=\tan\alpha$.

הערה ניתן להשתמש בכלל הנ"ל גם אם לא נתון במפורש ש-α היא זווית חדה. במקרים אלה, יש להניח ש-α היא חדה ולהסתמך על הכלל.

דוגמה 4

הצג את הפונקציות הטריגונומטריות הבאות באמצעות פונקציות טריגונומטריות של זווית α.

א. $\sin(180°+\alpha)$.   ב. $\cos(180°-\alpha)$.   ג. $\tan(270°+\alpha)$.

ד. $\sin(450°-\alpha)$.   ה. $\cos\left(540°+\alpha\right)$.

פתרון:

א. הזווית הנתונה מקיימת: $180°+\alpha=90°\cdot 2+\alpha$. במקרה זה $n=2$ (מספר זוגי), לכן השם המקורי סינוס איננו משתנה.
מהנחה ש- α זווית חדה, נקבל כי הזווית $(180°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השלישי שבו סינוס שלילי. לפיכך נקבל: $\sin\left(180°+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

ב. הזווית הנתונה מקיימת: $180°-\alpha=90°\cdot 2-\alpha$. במקרה זה $n=2$ (מספר זוגי) , לכן השם המקורי קוסינוס איננו משתנה.
מהנחה ש- α זווית חדה נקבל כי הזווית $(180°-\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השני שבו קוסינוס שלילי. כלומר: $\cos\left(180°-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

ג. הזווית הנתונה מקיימת: $270°+\alpha=90°\cdot 3+\alpha$. במקרה זה $n=3$ (מספר אי-זוגי), לפיכך השם המקורי טנגנס משתנה לקוטנגנס.
מהנחה ש- α זווית חדה נקבל כי הזווית $(270°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע הרביעי שבו טנגנס שלילי. לכן: $\tan\left(270°+\alpha\right)=-\cot\alpha$ או $\tan\left(270°+\alpha\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

ד. הזווית הנתונה מקיימת: $450°-\alpha=90°\cdot 5-\alpha$. במקרה זה $n=5$ (מספר אי-זוגי), לכן השם המקורי סינוס משתנה לקוסינוס.
מההנחה ש- α היא זווית חדה, נקבל שהזווית $(450°-\alpha)$ "מסתיימת" ברביע הראשון שבו סינוס חיובי. זאת אומרת, $\sin\left(450°-\alpha\right)=\cos\alpha$.

ה. הזווית הנתונה מקיימת: $540°+\alpha=90°\cdot 6+\alpha$. במקרה זה $n=6$ (מספר זוגי), לכן השם המקורי קוסינוס איננו משתנה.
מהנחה ש- α זווית חדה, הזווית $(540°+\alpha)$ "מסתיימת" ברביע השלישי שבו קוסינוס שלילי. לפיכך נקבל: $\cos\left(540°+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

כדי להציג את הפונקציות הטריגונומטריות של הזוויות $x=90°n\pm\alpha$ או $x=\frac{\pi}{2}n\pm\alpha$, כאשר $n=1, 2, 3, 4$ בעזרת זווית α, ניתן להיעזר בטבלה הבאה:

x	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sinx	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cosx	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tanx	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
cotx	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

בתרגילים **1.11 – 1.19** חשב ללא מחשבון:

1.11 $\sin 120°$ **1.12** $\cos 135°$ **1.13** $\tan 225°$

1.14 $\sin 315°$ **1.15** $\cos 240°$ **1.16** $\cot 300°$

1.17 $\sin\frac{13\pi}{4}$ **1.18** $\cos\frac{17\pi}{6}$ **1.19** $\tan\frac{15\pi}{4}$

<u>תשובות:</u> **1.11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.12.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.13.** 1. **1.14.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.15. $-\frac{1}{2}$. **1.16.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.17.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.18.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.19. -1.

הזהויות הטריגונומטריות היסודיות

לכל זווית α מתקיים: (1) $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

דוגמה 1

נתון כי $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $90°<\alpha<180°$, **מצא את** $\cos\alpha$.

פתרון:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

לפי הנתון, הזווית α "מסתיימת" ברביע השני שבו קוסינוס שלילי, לכן נקבל:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

דוגמה 2

נתון כי $\cos\alpha=-0.8$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$, **מצא את** $\sin\alpha$.

פתרון:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

הזווית α "מסתיימת" ברביע השלישי שבו סינוס שלילי לפיכך מתקיים:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=-\sqrt{1-(-0.8)^2}=-\sqrt{0.36} \Rightarrow \sin\alpha=-0.6$$

דוגמה 3

נתון כי $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $270^\circ<\alpha<360^\circ$, **מצא את** $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

פתרון:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

הזווית α "מסתיימת" ברביע הרביעי שבו קוסינוס חיובי , לכן מתקיים :

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{169}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{12}{13}$$

נחשב את $\tan\alpha$ ואת $\cot\alpha$:

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{-5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{-5}{13}\cdot\frac{13}{12} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{-5}{12}\ ;$$

$$\boxed{\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{12}{13}:\frac{-5}{13}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{-5} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{-12}{5}$$

נעבור לזהויות הבאות:

(3) $$\boxed{\mathbf{1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}}}$$ $(\sin\alpha\neq 0)$

(2) $$\boxed{\mathbf{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}}$$ $(\cos\alpha\neq 0)$

הזהות (2) מתקבלת כאשר את שני האגפים של זהות (1) **מחלקים ב-** $\cos^2\alpha$.

הזהות (3) מתקבלת כאשר את שני האגפים של זהות (1) **מחלקים ב-** $\sin^2\alpha$.

1.20

נתון כי $\tan\alpha=-\sqrt{3}$, $90°<\alpha<180°$. **מצא את** $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cot\alpha$.

<u>תשובה:</u> $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.21

נתון כי $\cot\alpha=\sqrt{8}$, $0°<\alpha<90°$. **מצא את** $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$.

<u>תשובה:</u> $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

הפונקציות הטריגונומטריות של סכום והפרש שתי זוויות

* **הסינוס של סכום והפרש שתי זוויות:**

(4) $$\boxed{\mathbf{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}}$$

(5) $$\boxed{\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}}$$

דוגמה

פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sin 53°\cdot\cos 37°+\cos 53°\cdot\sin 37°$

ב. $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$

פתרון:

א. בהסתמך על זהות (4) נקבל:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin 53°\cdot\cos 37°+\cos 53°\cdot\sin 37°=\sin(53°+37°)=\sin 90°=1$$

ב. בהסתמך על זהות (5) נקבל:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

1.22

פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$ **ב.** $\sin 7\beta\cdot\cos 3\beta-\cos 7\beta\cdot\sin 3\beta$

<u>תשובה:</u> **א.** $\sin 3\alpha$. **ב.** $\sin 4\beta$.

1.23

חשב ללא מחשבון: **א.** $\sin 75°$ **ב.** $\sin 15°$ **ג.** $\sin 105°$

<u>תשובה:</u> **א.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **ב.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. **ג.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

* **הקוסינוס של סכום והפרש שתי זוויות:**

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (6)$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (7)$$

דוגמה

פשט את הביטויים הבאים:

א. $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$ **ב.** $\cos 2x\cdot\cos\frac{4x}{3}+\sin 2x\cdot\sin\frac{4x}{3}$

פתרון:

א. נשתמש בזהות (6) ונקבל:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{7\pi}{12}$$

ב. על-פי זהות (7) נקבל:

$$\boxed{\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x\cdot\cos\frac{4x}{3}+\sin 2x\cdot\sin\frac{4x}{3}=\cos\left(2x-\frac{4x}{3}\right)=\cos\frac{2x}{3}$$

1.24

פשט את הביטוי הבא: $\cos(45^\circ-\alpha)\cdot\cos(15^\circ+\alpha)-\sin(45^\circ-\alpha)\cdot\sin(15^\circ+\alpha)$

<u>תשובה:</u> $\frac{1}{2}$.

1.25

חשב ללא מחשבון: **א.** $\cos 15^\circ$ 　 **ב.** $\cos 150^\circ$

<u>תשובה:</u> **א.** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. 　 **ב.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

* הטנגנס של סכום והפרש שתי זוויות:

$$\boxed{\mathbf{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\mathbf{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}} \qquad (9)$$

דוגמה 1

פשט את הביטוי: $\frac{\tan 26^\circ+\tan 19^\circ}{1-\tan 26^\circ\cdot\tan 19^\circ}$

פתרון: נשתמש בזהות (8) ונפשט את הביטוי:

$$\boxed{\mathbf{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan 26^\circ+\tan 19^\circ}{1-\tan 26^\circ\cdot\tan 19^\circ}=\tan(26^\circ+19^\circ)=\tan 45^\circ=1$$

דוגמה 2

פשט את הביטוי: $\frac{\tan\frac{3\beta}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{3\beta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}$

פתרון: על-פי זהות (9) נקבל:

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan\frac{3\beta}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{3\beta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{3\beta}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\tan\beta$$

דוגמה 3

פשט את הביטוי:

$$\frac{\tan(2x+y)+\tan(x-y)}{1-\tan(2x+y)\cdot\tan(x-y)}$$

פתרון: בהסתמך על זהות (8) נקבל:

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tan(2x+y)+\tan(x-y)}{1-\tan(2x+y)\cdot\tan(x-y)}=\tan\left[(2x+y)+(x-y)\right]=\tan 3x$$

בתרגילים **1.26 – 1.37** הוכח את הזהויות הבאות:

1.26 $\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\sin^3\alpha}=\tan\alpha$

1.27 $\sin^2\alpha=\left(\sin^2\alpha-\sin^4\alpha\right)\cdot\left(1+\tan^2\alpha\right)$

1.28 $\frac{1}{1-\sin\alpha}+\frac{1}{1+\sin\alpha}=2+2\tan^2\alpha$

1.29 $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$

1.30 $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

1.31 $\tan^2(180°+\alpha)\cdot\cos^2(90°+\alpha)=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$

1.32 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)$

1.33 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

1.34 $\sin(\alpha+45°)-\sin(\alpha-45°)=\sqrt{2}\cos\alpha$

1.35 $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)$

1.36 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan\left(45^\circ-\alpha\right)$

1.37 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

הפונקציות הטריגונומטריות של זווית כפולה

* הסינוס של זווית כפולה:

בזהות (4) נציב את α במקום β ונקבל:

$$\sin\left(\alpha+\alpha\right)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}} \qquad (10)$$

דוגמה השתמש בזהות (10) ומצא את:

א. $\sin 4\alpha$. **ב.** $\sin 10\alpha$. **ג.** $\sin 7\alpha$. **ד.** $\sin\alpha$.

פתרון: על-פי הזהות $\boxed{\mathbf{\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}$ נקבל:

א. $\sin 4\alpha=\sin\left[2\cdot\left(2\alpha\right)\right]=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$

ב. $\sin 10\alpha=\sin\left[2\cdot\left(5\alpha\right)\right]=2\sin 5\alpha\cdot\cos 5\alpha$

ג. $\sin 7\alpha=\sin\left[2\cdot\left(\frac{7\alpha}{2}\right)\right]=2\sin\frac{7\alpha}{2}\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}$

ד. $\sin\alpha=\sin\left[2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

* הקוסינוס של זווית כפולה:

בזהות (6) נציב את α במקום β ונקבל:

$$\cos\left(\alpha+\alpha\right)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha}} \qquad (11)$$

מזהות (1) נובע כי $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ ו- $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$. לפיכך מזהות (11) ניתן לקבל את הזהויות הבאות:

$$\boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha}} \qquad (11'') \qquad ; \qquad \boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}} \qquad (11')$$

דוגמה השתמש בזהויות (11) , (11′) , (11″) ומצא את:

א. $\cos 6\alpha$. **ב.** $\cos 14\alpha$. **ג.** $\cos 5\alpha$. **ד.** $\cos\alpha$.

פתרון:

א.

$$\cos 6\alpha = \cos\left[2\cdot(3\alpha)\right] = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha \ ;$$

$$\cos 6\alpha = \cos\left[2\cdot(3\alpha)\right] = 2\cos^2 3\alpha - 1 \ ; \qquad \cos 6\alpha = \cos\left[2\cdot(3\alpha)\right] = 1-2\sin^2 3\alpha$$

ב.

$$\cos 14\alpha = \cos\left[2\cdot(7\alpha)\right] = \cos^2 7\alpha - \sin^2 7\alpha \ ;$$

$$\cos 14\alpha = \cos\left[2\cdot(7\alpha)\right] = 2\cos^2 7\alpha - 1 \ ; \qquad \cos 14\alpha = \cos\left[2\cdot(7\alpha)\right] = 1-2\sin^2 7\alpha$$

ג.

$$\cos 5\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\right] = \cos^2\frac{5\alpha}{2} - \sin^2\frac{5\alpha}{2} \ ;$$

$$\cos 5\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\right] = 2\cos^2\frac{5\alpha}{2} - 1 \ ; \qquad \cos 5\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\right] = 1-2\sin^2\frac{5\alpha}{2}$$

ד.

$$\cos\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \ ;$$

$$\cos\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \ ; \qquad \cos\alpha = \cos\left[2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

* הטנגנס של זווית כפולה:

בזהות (8) נציב את α במקום β ונקבל:

$$\tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}} \qquad (12)$$

דוגמה השתמש בזהות (12) ומצא את:

א. $\tan 4\alpha$ **ב.** $\tan 3\alpha$ **ג.** $\tan\alpha$

פתרון:

א. $$\tan 4\alpha = \tan\left[2\cdot(2\alpha)\right] = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}$$

ב. $$\tan 3\alpha = \tan\left[2\cdot\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\right] = \frac{2\tan\frac{3\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{3\alpha}{2}}$$

ג. $$\tan\alpha = \tan\left[2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

בתרגילים **1.38 – 1.41** הוכח את הזהויות הבאות:

1.38 $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ **1.39** $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

1.40 $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ **1.41** $\dfrac{2}{\tan 2\alpha} = \cot\alpha - \tan\alpha$

הפונקציות הטריגונומטריות של מחצית הזווית

* הסינוס של מחצית הזווית:

ניעזר בזהות $(11'')$ ונמצא:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad (13) \qquad \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \quad (13')$$

שים לב, הסימן לפני השורש בזהות $(13')$ נקבע לפי הרביע בו נמצאת $\frac{\alpha}{2}$.

דוגמה השתמש בזהות (13) ומצא את:

א. $\sin^2\alpha$ **ב.** $\sin^2 3\alpha$ **ג.** $\sin^2\frac{5\alpha}{2}$

פתרון:

א. $$\sin^2\alpha=\sin^2\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

ב. $$\sin^2 3\alpha=\sin^2\left(\frac{6\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos 6\alpha}{2}$$

ג. $$\sin^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos 5\alpha}{2}$$

* **הקוסינוס של מחצית הזווית:**

ניעזר בזהות $(11')$ ונמצא:

$$\boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1 \quad\Rightarrow\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad (14) \qquad\qquad \boxed{\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}} \qquad (14')$$

שים לב, הסימן לפני השורש בזהות $(14')$ *נקבע לפי הרביע בו נמצאת* $\frac{\alpha}{2}$.

דוגמה השתמש בזהות (14) ומצא את:

א. $\cos^2\alpha$ **ב.** $\cos^2 4x$ **ג.** $\cos^2\frac{7\beta}{2}$

פתרון:

א. $$\cos^2\alpha=\cos^2\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

ב. $$\cos^2 4x=\cos^2\left(\frac{8x}{2}\right)=\frac{1+\cos 8x}{2}$$

ג. $$\cos^2\left(\frac{7\beta}{2}\right)=\frac{1+\cos 7\beta}{2}$$

* הטנגנס של מחצית הזווית:

נחלק את הזהות (13) בזהות (14) ונקבל:

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{2}{1+\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}:\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}:\frac{1+\cos\alpha}{2} \quad\Rightarrow$$

$$(15')\qquad \boxed{\mathbf{\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}} \qquad\qquad (15)\qquad \boxed{\mathbf{\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

שים לב, הסימן לפני השורש בזהות $(15')$ נקבע לפי הרביע בו נמצאת $\frac{\alpha}{2}$.

דוגמה השתמש בזהות (15) ומצא את:

א. $\tan^2\alpha$ **ב.** $\tan^2 5\beta$ **ג.** $\tan^2\left(\frac{9x}{2}\right)$

פתרון:

א. $\tan^2\alpha=\tan^2\left(\frac{2\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

ב. $\tan^2 5\beta=\tan^2\left(\frac{10\beta}{2}\right)=\frac{1-\cos 10\beta}{1+\cos 10\beta}$

ג. $\tan^2\left(\frac{9x}{2}\right)=\frac{1-\cos 9x}{1+\cos 9x}$

בתרגילים **1.42 – 1.44** הוכח את הזהויות הבאות:

1.42 $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$

1.43 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

1.44 $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}$

זהויות לסכום והפרש שתי פונקציות טריגונומטריות

* סכום והפרש של שתי פונקציות סינוס:

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (16)$$

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad (17)$$

דוגמה נבטא את סכום (או הפרש) של שתי פונקציות בעזרת מכפלה.

א. $\sin 5x+\sin 3x$ ב. $\sin 10\beta-\sin 4\beta$ ג. $\sin\frac{7\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}$

פתרון: בהסתמך על זהויות (16) ו- (17) נקבל:

א. $\sin 5x+\sin 3x=2\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2}=2\sin 4x\cdot\cos x$

ב. $\sin 10\beta-\sin 4\beta=2\sin\frac{10\beta-4\beta}{2}\cdot\cos\frac{10\beta+4\beta}{2}=2\sin 3\beta\cdot\cos 7\beta$

ג. $\sin\frac{7\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}=2\sin\frac{\frac{7\alpha}{2}+\frac{5\alpha}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{7\alpha}{2}-\frac{5\alpha}{2}}{2}=2\sin 3\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

* סכום והפרש של שתי פונקציות קוסינוס:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (18)$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (19)$$

דוגמה נבטא את סכום (או הפרש) של שתי פונקציות בעזרת מכפלה.

א. $\cos 9\alpha+\cos 4\alpha$ ב. $\cos 11x-\cos 5x$ ג. $\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\gamma}{3}$

פתרון: על-פי זהויות (18) ו- (19) נקבל:

א. $$\cos 9\alpha + \cos 4\alpha = 2\cos\frac{9\alpha+4\alpha}{2}\cdot\cos\frac{9\alpha-4\alpha}{2} = 2\cos\frac{13\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha}{2}$$

ב. $$\cos 11x - \cos 5x = -2\sin\frac{11x+5x}{2}\cdot\sin\frac{11x-5x}{2} = -2\sin 8x\cdot\sin 3x$$

ג. $$\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{3} = -2\sin\frac{\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{3}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma}{3}}{2} = -2\sin\frac{5\gamma}{12}\cdot\sin\frac{\gamma}{12}$$

בתרגילים **1.45 – 1.47** הוכח את הזהויות הבאות:

1.45 $$\sin 3\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin\alpha = 4\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

1.46 $$\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = 2\sin\alpha$$

1.47 $$\frac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha} = \tan 3\alpha$$

זהויות המעבר מכפל לסכום או הפרש פונקציות טריגונומטריות

$$\boxed{\mathbf{\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]}} \qquad (20)$$

דוגמה נבטא את מכפלה של שתי פונקציות בעזרת סכום.

א. $\cos 3x\cdot\cos x$ **ב.** $\cos 7\gamma\cdot\cos 6\gamma$ **ג.** $\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

פתרון: בהסתמך על זהות (20) נקבל:

א. $$\cos 3x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\left[\cos(3x-x)+\cos(3x+x)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)$$

ב. $$\cos 7\gamma\cdot\cos 6\gamma = \frac{1}{2}\left[\cos(7\gamma-6\gamma)+\cos(7\gamma+6\gamma)\right] = \frac{1}{2}(\cos\gamma+\cos 13\gamma)$$

ג. $$\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{5\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 3\alpha)$$

$$\boxed{\mathbf{\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]}} \qquad (21)$$

דוגמה נבטא את מכפלה של שתי פונקציות בעזרת הפרש.

א. $\sin 4x \cdot \sin 2x$ **ב.** $\sin 5\beta \cdot \sin 2\beta$ **ג.** $\sin 2\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

פתרון: על-פי זהות (21) נקבל:

א. $\sin 4x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}\left[\cos(4x-2x) - \cos(4x+2x)\right] = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x)$

ב. $\sin 5\beta \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(5\beta-2\beta) - \cos(5\beta+2\beta)\right] = \frac{1}{2}(\cos 3\beta - \cos 7\beta)$

ג. $\sin 2\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\gamma-\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(2\gamma+\frac{\gamma}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\gamma}{2} - \cos\frac{5\gamma}{2}\right)$

$$\boxed{\mathbf{\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]}} \qquad (22)$$

דוגמה נבטא את מכפלה של שתי פונקציות בעזרת סכום.

א. $\sin 9\beta \cdot \cos 4\beta$ **ב.** $\sin\frac{7\alpha}{2} \cdot \cos 3\alpha$ **ג.** $\sin\frac{5x}{3} \cdot \cos\frac{2x}{3}$

פתרון: נשתמש בזהות (22) ונקבל:

א. $\sin 9\beta \cdot \cos 4\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(9\beta+4\beta) + \sin(9\beta-4\beta)\right] = \frac{1}{2}(\sin 13\beta + \sin 5\beta)$

ב. $\sin\frac{7\alpha}{2} \cdot \cos 3\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7\alpha}{2}+3\alpha\right) + \sin\left(\frac{7\alpha}{2}-3\alpha\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{13\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$

ג. $\sin\frac{5x}{3} \cdot \cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5x}{3}+\frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\frac{5x}{3}-\frac{2x}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7x}{3} + \sin x\right)$

$$\boxed{\mathbf{\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]}} \qquad (23)$$

דוגמה נבטא את מכפלה של שתי פונקציות בעזרת הפרש.

א. $\cos 10\gamma \cdot \sin 8\gamma$ **ב.** $\cos\frac{3\alpha}{4} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ **ג.** $\cos\frac{7x}{6} \cdot \sin\frac{2x}{3}$

פתרון: נשתמש בזהות (23) ונקבל:

א. $\cos 10\gamma \cdot \sin 8\gamma = \frac{1}{2}\left[\sin\left(10\gamma + 8\gamma\right) - \sin\left(10\gamma - 8\gamma\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin 18\gamma - \sin 2\gamma\right)$

ב. $\cos\frac{3\alpha}{4} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\alpha}{4} - \sin\frac{\alpha}{4}\right)$

ג. $\cos\frac{7x}{6} \cdot \sin\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{7x}{6} + \frac{2x}{3}\right) - \sin\left(\frac{7x}{6} - \frac{2x}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{11x}{6} - \sin\frac{x}{2}\right)$

פונקציה זוגית ואי–זוגית

הגדרה	
	פונקציה זוגית – פונקציה המקיימת $f(-x) = f(x)$ לכל x ו-$(-x)$ בתחום הגדרתה. **פונקציה אי-זוגית** – פונקציה המקיימת $f(-x) = -f(x)$ לכל x ו- $(-x)$ בתחום הגדרתה.

הערה לא כל פונקציה היא בהכרח זוגית או אי-זוגית.
אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אזי היא סימטרית ביחס לציר ה-y.
אם הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית, אזי היא סימטרית ביחס לראשית הצירים.

משפט	
	קוסינוס היא פונקציה זוגית. כלומר, $\cos(-x) = \cos x$. פונקציות סינוס, טנגנס וקוטנגנס הן אי-זוגיות. דהיינו, מתקיים: $\sin(-x) = -\sin x \ , \ \tan(-x) = -\tan x \ , \ \cot(-x) = -\cot x$

דוגמה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$. הוכח כי $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

פתרון: נראה שהפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \sin(-x)\cdot\cos(-2x)$ $\quad \boxed{\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}}$ $\quad \boxed{\mathbf{\cos(-2x) = \cos 2x}}$

$\Rightarrow \quad f(-x) = -\sin x \cdot \cos 2x \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$ מ.ש.ל.

דוגמה 2

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$. הוכח כי $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

פתרון: נראה כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(-x)=f(x)$.

$$f(-x)=\frac{\sin(-2x)}{\tan(-3x)} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{\sin(-2x)=-\sin 2x}\\ \mathbf{\tan(-3x)=-\tan 3x}\end{array}} \qquad \Rightarrow \quad f(-x)=\frac{-\sin 2x}{-\tan 3x}=\frac{\sin 2x}{\tan 3x} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad f(-x)=f(x)$ מ.ש.ל.

דוגמה 3

נתונה הפונקציה $f(x)=3-\cos x\cdot\sin^2 4x$. הוכח כי $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

פתרון: נראה כי $f(x)$ מקיימת $f(-x)=f(x)$.

$$f(-x)=3-\cos(-x)\cdot\sin^2(-4x) \qquad \boxed{\mathbf{\cos(-x)=\cos x}} \qquad \boxed{\mathbf{\sin(-4x)=-\sin 4x}}$$

$$\Rightarrow \quad f(-x)=3-\cos x\cdot(-\sin 4x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(-x)=3-\cos x\cdot\sin^2 4x \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad f(-x)=f(x)$ מ.ש.ל.

בתרגילים **1.48 – 1.50** הוכח את הזהויות הבאות:

1.48* $\cos(270^\circ+4\alpha)+\sin(180^\circ-8\alpha)-\sin(360^\circ-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\sin 6\alpha$

1.49* $\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$

1.50* $\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)=1$

פרק 2: משוואות טריגונומטריות

מחזוריות הפונקציות הטריגונומטריות

הגדרה	פונקציה $f(x)$ נקראת מחזורית, אם קיים מספר קבוע $T>0$, כך שלכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה, גם $x-T$ וגם $x+T$ נמצאים בתחום ההגדרה ומתקיים: $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. המספר החיובי T, הקטן ביותר המקיים את השוויון הנ"ל, נקרא המחזור של הפונקציה.

משפט	הפונקציות הטריגונומטריות סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס הן פונקציות מחזוריות. המחזור של סינוס וקוסינוס הוא 2π $(360°)$ והמחזור של טנגנס וקוטנגנס הוא π $(180°)$. כלומר, מתקיים: $\sin x=\sin(x\pm 2\pi K),\quad \cos x=\cos(x\pm 2\pi K),$ $\tan x=\tan(x\pm \pi K),\quad \cot x=\cot(x\pm \pi K)$ $K=0,\ \pm1,\ \pm2,..$

הערות

א. אם מחזורה של פונקציה $f(x)$ הוא T, אזי הפונקציה $A\cdot f(x)+B$ (A,B מספרים קבועים, $A\neq 0$) גם היא מחזורית, בעלת אותו מחזור T.

ב. אם הפונקציה $f(x)$ היא מחזורית בעלת מחזור T, אזי הפונקציה $f(mx+n)$ (m,n מספרים קבועים, $m\neq 0$) גם היא מחזורית, בעלת מחזור $\frac{T}{m}$.

דוגמה

מצא את המחזור של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=3\cos x$. **ב.** $f(x)=3\sin x+7$. **ג.** $f(x)=\tan 2x$.

ד. $f(x)=2\cos\frac{x}{3}+5$.

פתרון:

א. המחזור של $\cos x$ הוא $T=2\pi$. על-פי הערה א', המחזור של הפונקציה $f(x)=3\cos x$ גם הוא $T=2\pi$.

ב. המחזור של $\sin x$ הוא $T=2\pi$. על סמך הערה א', מחזורה של הפונקציה $f(x)=3\sin x+7$ גם הוא $T=2\pi$.

ג. המחזור של $\tan x$ הוא $T=\pi$. על-פי הערה ב', מחזורה של הפונקציה $f(x)=\tan 2x$ הוא $T=\frac{\pi}{2}$.

ד. המחזור של $\cos x$ הוא $T=2\pi$. לפי הערות א' וב', המחזור של הפונקציה $f(x)=2\cos\frac{x}{3}+5$ הוא $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

משוואות טריגונומטריות מהצורה $\sin x=a$ או $\sin x=\sin\alpha$

הערה המשוואות $\sin x=a$ ו- $\sin x=\sin\alpha$ הן משוואות שקולות, כאשר $a=\sin\alpha$ $(-1\le a\le 1)$.

אם α זווית במעלות, אזי פתרונות המשוואה הם:

$$\mathbf{\sin x=\sin\alpha^\circ} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{x_1=\alpha^\circ+360^\circ K} \\ \mathbf{x_2=180^\circ-\alpha^\circ+360^\circ K} \end{array}\right. \text{או} \qquad K=0,\pm 1,\pm 2,...$$

אם α זווית ברדיאנים, אזי פתרונות המשוואה הם:

$$\mathbf{\sin x=\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{x_1=\alpha+2\pi K} \\ \mathbf{x_2=\pi-\alpha+2\pi K} \end{array}\right. \text{או} \qquad K=0,\pm 1,\pm 2,...$$

בתרגילים **2.01 – 2.06** תן פתרון כללי למשוואות הבאות:

2.01 $\sin x=\sin 52^\circ$ **2.02** $\sin x=\sin\frac{2\pi}{5}$ **2.03** $\sin x=\frac{1}{3}$

2.04 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$ **2.05** $\sin\frac{x}{5}=\sin\frac{\pi}{9}$ **2.06** $\sin(3x+15^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>תשובות:</u> **2.01** $x_1 = 52° + 360°K$, $x_2 = 128° + 360°K$. **2.02** $x_1 = \frac{2\pi}{5} + 2\pi K$, $x_2 = \frac{3\pi}{5} + 2\pi K$.

2.03 $x_1 = 19.47° + 360°K$, $x_2 = 160.53° + 360°K$.

2.04 $x_1 = -15° + 180°K$, $x_2 = 105° + 180°K$. **2.05** $x_1 = \frac{5\pi}{9} + 10\pi K$, $x_2 = \frac{40\pi}{9} + 10\pi K$.

2.06 $x_1 = -25° + 120°K$, $x_2 = 75° + 120°K$.

הפתרונות המיוחדים עבור סינוס

$\mathbf{\sin x = 0}$	$\Rightarrow$	$x = 180°K$	$(x = \pi K)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$\mathbf{\sin x = 1}$	$\Rightarrow$	$x = 90° + 360°K$	$\left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi K\right)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$\mathbf{\sin x = -1}$	$\Rightarrow$	$x = -90° + 360°K$	$\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi K\right)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

בתרגילים **2.07 – 2.09** פתור את המשוואות הבאות:

2.07 $\sin\left(\frac{2x}{3} - 28°\right) = 0$

2.08 $\sin\left(6x + \frac{3\pi}{5}\right) = 1$

2.09 $2\sin(x + 36°) + 2 = 0$

<u>תשובות:</u> **2.07** $x = 42° + 270°K$. **2.08** $x = -\frac{\pi}{60} + \frac{\pi K}{3}$.

2.09 $x = -126° + 360°K$.

משוואות טריגונומטריות מהצורה $\cos x=a$ או $\cos x=\cos\alpha$

הערה המשוואות $\cos x=a$ ו- $\cos x=\cos\alpha$ הן משוואות שקולות, כאשר $a=\cos\alpha$ $(-1\le a\le 1)$.

אם α זווית במעלות, אזי פתרונות המשוואה הם:

$$\mathbf{\cos x=\cos\alpha^\circ} \quad\Rightarrow\quad \text{או}\left[\begin{array}{l}\mathbf{x_1=\alpha^\circ+360^\circ K}\\ \mathbf{x_2=-\alpha^\circ+360^\circ K}\end{array}\right.\qquad K=0,\pm1,\pm2,...$$

אם α זווית ברדיאנים, אזי פתרונות המשוואה הם:

$$\mathbf{\cos x=\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \text{או}\left[\begin{array}{l}\mathbf{x_1=\alpha+2\pi K}\\ \mathbf{x_2=-\alpha+2\pi K}\end{array}\right.\qquad K=0,\pm1,\pm2,...$$

בתרגילים **2.15 – 2.10** תן פתרון כללי למשוואות הבאות:

2.10 $\cos x=\cos 38^\circ$

2.11 $\cos x=\cos\frac{3\pi}{10}$

2.12 $2\cos 3x+1=0$

2.13 $\cos(5x-15^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.14 $6\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-3=0$

2.15 $\frac{1}{3}\cdot\cos\left(\frac{5x}{6}-20^\circ\right)+\frac{\sqrt{2}}{6}=0$

<u>תשובות:</u>

2.10 $x=\pm38^\circ+360^\circ K$.

2.11 $x_1=\frac{3\pi}{10}+2\pi K$, $x_2=-\frac{3\pi}{10}+2\pi K$.

2.12 $x=\pm40^\circ+120^\circ K$.

2.13 $x_1=12^\circ+72^\circ K$, $x_2=-6^\circ+72^\circ K$.

2.14 $x_1=\frac{\pi}{6}+4\pi K$, $x_2=-\frac{7\pi}{6}+4\pi K$.

2.15 $x_1=186^\circ+432^\circ K$, $x_2=-138^\circ+432^\circ K$.

הפתרונות המיוחדים עבור קוסינוס

$\mathbf{\cos x=0}$	$\Rightarrow$	$x=90^\circ+180^\circ K$	$\left(x=\frac{\pi}{2}+\pi K\right)$	$K=0,\pm1,\pm2,...$
$\mathbf{\cos x=1}$	$\Rightarrow$	$x=360^\circ K$	$(x=2\pi K)$	$K=0,\pm1,\pm2,...$
$\mathbf{\cos x=-1}$	$\Rightarrow$	$x=180^\circ+360^\circ K$	$(x=\pi+2\pi K)$	$K=0,\pm1,\pm2,...$

בתרגילים **2.16 – 2.18** פתור את המשוואות הבאות:

2.16 $\cos\left(\frac{11x}{12}-31°\right)=0$

2.17 $\cos\left(\frac{2x}{9}+\frac{\pi}{3}\right)=1$

2.18 $\frac{3}{5}\cdot\cos\left(\frac{6x}{7}+72°\right)+\frac{3}{5}=0$

<u>תשובות:</u> **2.16** $x=132°+\frac{2160°K}{11}$. **2.17** $x=-\frac{3\pi}{2}+9\pi K$.

2.18 $x=126°+420°K$.

משוואות טריגונומטריות מהצורה $\tan x=a$ או $\tan x=\tan\alpha$

הערה המשוואות $\tan x=a$ ו- $\tan x=\tan\alpha$ הן משוואות שקולות, כאשר $a=\tan\alpha$ $(-\infty<a<\infty)$.

אם α זווית במעלות, אזי פתרון המשוואה הוא:

$$\mathbf{\tan x=\tan\alpha°} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=\alpha°+180°K}\ ,\quad K=0,\pm1,\pm2,...$$

אם α זווית ברדיאנים, אזי פתרון המשוואה הוא:

$$\mathbf{\tan x=\tan\alpha} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=\alpha+\pi K}\ ,\quad K=0,\pm1,\pm2,...$$

הערה היות ש- $\boxed{\mathbf{\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}}}$, הפונקציה $\tan x$ מוגדרת עבור $\cos x\neq 0$. כלומר, $x\neq 90°+180°K$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi K\right)$. לפיכך בכל משוואה שכוללת את פונקציית הטנגנס צריך לשים לב לתחום ההגדרה של המשוואה.

בתרגילים **2.19 – 2.22** פתור את המשוואות הבאות:

2.19 $\tan x=\tan 63°$

2.20 $\tan 4x=\tan\frac{8\pi}{15}$

2.21 $\tan(5x+41°)=3$

2.22 $6\cdot\tan\left(\frac{3x}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}$

<u>תשובות:</u> **2.19** $x = 63° + 180°K$.   **2.20** $x = \frac{2\pi}{15} + \frac{\pi K}{4}$.

2.21 $x = 6.11° + 36°K$.   **2.22** $x = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi K}{3}$.

הפתרונות המיוחדים עבור טנגנס

$\mathbf{\tan x = 0}$	$\Rightarrow$	$x = 180°K$	$(x = \pi K)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$\mathbf{\tan x = 1}$	$\Rightarrow$	$x = 45° + 180°K$	$\left(x = \frac{\pi}{4} + \pi K\right)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$\mathbf{\tan x = -1}$	$\Rightarrow$	$x = -45° + 180°K$	$\left(x = -\frac{\pi}{4} + \pi K\right)$	$K = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

בתרגילים **2.23 – 2.25** פתור את המשוואות הבאות:

2.23 $\tan\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ **2.24** $\tan\left(\frac{5x}{8} - 25°\right) = 1$

2.25 $\tan\left(\frac{9x}{8} + 18°\right) + 1 = 0$

<u>תשובות:</u> **2.23** $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi K}{4}$.   **2.24** $x = 112° + 288°K$.

2.25 $x = -56° + 160°K$.

פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון

כדי למצוא את הפתרונות בתחום הנתון, צריך למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה הטריגונומטרית ולהציב מספר ערכים שלמים במקום K $(K = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
מבין הפתרונות המתקבלים יש לבחור את אלה שנמצאים בתחום הנתון.

דוגמה פתור את המשוואה $\tan(4x + 20°) = \sqrt{3}$ בתחום $-90° < x < 90°$.

פתרון: נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה. **ידוע כי** $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$**, לכן מתקיים:**

$$\tan(4x+20^\circ)=\tan 60^\circ \quad\Rightarrow\quad 4x+20^\circ=60^\circ+180^\circ K \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 4x=40^\circ+180^\circ K\ \ /:4 \quad\Rightarrow\quad x=10^\circ+45^\circ K,\quad K=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

נמצא את הפתרונות בתחום $-90^\circ<x<90^\circ$**. נציב בפתרון הכללי** $(x=10^\circ+45^\circ K)$
מספר ערכים שלמים במקום K.

$K=-3:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot(-3) \quad\Rightarrow\quad \cancel{x=-125^\circ}$ *אינו שייך לתחום*

$K=-2:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot(-2) \quad\Rightarrow\quad \underline{x=-80^\circ}$

$K=-1:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot(-1) \quad\Rightarrow\quad \underline{x=-35^\circ}$

$K=0:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=10^\circ}$

$K=1:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{x=55^\circ}$

$K=2:\quad x=10^\circ+45^\circ\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad \cancel{x=100^\circ}$ *אינו שייך לתחום*

על מנת לפשט את תהליך הפתרון ניתן להשתמש בטבלה הבאה:

K	-3	-2	-1	0	1	2
$x=10^\circ+45^\circ K$	$\cancel{-125^\circ}$	-80°	-35°	10°	55°	$\cancel{100^\circ}$

קבוצת הפתרונות של המשוואה השייכים לתחום $-90^\circ<x<90^\circ$ היא:

$$x=\{-80^\circ,\ -35^\circ,\ 10^\circ,\ 55^\circ\}$$

בתרגילים **2.31 – 2.26** פתור את המשוואות הבאות ומצא את הפתרונות בתחום הרשום משמאל למשוואה.

2.26 $\tan(6x+150^\circ)=\tan x \qquad 90^\circ<x<270^\circ$.

2.27 $2\cdot\cos 4x=1 \qquad 0^\circ\le x\le 360^\circ$.

2.28 $\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos 2x \qquad -\pi\le x\le\pi$.

2.29 $2\sin\left(\frac{9x}{2}+18^\circ\right)-\sqrt{2}=0 \qquad 0^\circ\le x\le 360^\circ$.

2.30 $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \qquad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

2.31 $\cos 4x-\sin x=0 \qquad -\pi\le x\le\pi$.

<u>תשובות:</u>

2.26 $x = \{114°, 150°, 186°, 222°, 258°\}$.

2.27 $x = \{15°, 75°, 105°, 165°, 195°, 255°, 285°, 345°\}$.

2.28 $x = \left\{-\frac{8\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$.

2.29 $x = \{6°, 26°, 86°, 106°, 166°, 186°, 246°, 266°, 326°, 346°\}$.

2.30 $x = \left\{-\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{5\pi}{4}, \frac{35\pi}{24}\right\}$.

2.31 $x = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{10}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}\right\}$.

משוואות טריגונומטרית שונות

משוואות בהן מופיע ריבוע של פונקציה טריגונומטרית

בתרגילים **2.32 – 2.35** פתור את המשוואות הבאות:

2.32 $\tan^2 x = 3$ **2.33** $\sin^2 3x = 1$

2.34 $2\cos^2 2x = 1$ **2.35** $4\sin^2 \frac{3x}{2} = 3$

<u>תשובות:</u>

2.32 $x_1 = 60° + 180°K$, $x_2 = -60° + 180°K$.

2.33 $x_1 = 30° + 120°K$, $x_2 = -30° + 120°K$.

2.34 $x = \pm 22.5° + 180°K$ או $x = \pm 67.5° + 180°K$.

2.35 $x = \{-40° + 240°K,\ 40° + 240°K,\ 80° + 240°K,\ 160° + 240°K\}$.

משוואות עם פירוק לגורמים

בתרגילים **2.36 – 2.40** פתור את המשוואות הבאות:

2.36 $\sin x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ **2.37** $(1 + 2\sin 2x)\cdot\left(1 - \sqrt{2}\cos 5x\right) = 0$

2.38 $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$ **2.39** $5\tan^2 3x - 2\tan 3x = 0$

2.40 $3\sin^2 4x = 2\sin 4x$

<u>תשובות:</u>

2.36 $x=\left\{\pi K\ ,\ -\frac{\pi}{6}+\pi K\right\}$.

2.37 $x=\{-15°+180°K,\ \pm 9°+72°K,\ 105°+180°K\}$.

2.38 $x=\{90°+180°K\ ,\ \pm 150°+360°K\}$.

2.39 $x=\{60°K,\ 7.27°+60°K\}$

2.40 $x=\{45°K,\ 10.45°+90°K,\ 34.55°+90°K\}$

משוואות הכוללות משוואה ריבועית

בתרגילים **2.41 – 2.44** פתור את המשוואות הבאות:

2.41 $3\tan^2 x+2\tan x-1=0$

2.42 $2\cos^2 x-\cos x-1=0$

2.43 $2\tan x-12\cot x-5=0$

2.44 $4\sin^2 2x-8\sin 2x+3=0$

<u>תשובות:</u>

2.41 $x=\{-45°+180°K,\ 18.43°+180°K\}$.

2.42 $x=\{\pm 120°+360°K,\ 360°K\}$.

2.43 $x=\{-56.31°+180°K,\ 75.96°+180°K\}$.

2.44 $x=\{15°+180°K,\ 75°+180°K\}$.

משוואות הומוגניות ממעלה ראשונה $(\mathbf{a\cdot\sin mx+b\cdot\cos mx=0})$

בתרגילים **2.45 – 2.47** פתור את המשוואות הבאות:

2.45 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$

2.46 $3\sin 2x-4\cos 2x=0$

2.47 $\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$

<u>תשובות:</u>

2.45 $x=-60°+180°K$.

2.46 $x=26.565°+90°K$.

2.47 $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi K$.

משוואות הומוגניות ממעלה שנייה

$(a\cdot\sin^2 mx + b\cdot\sin mx\cdot\cos mx + c\cdot\cos^2 mx = 0)$

בתרגילים **2.48 – 2.50** פתור את המשוואות הבאות:

2.48 $\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x - 2\cos^2 x = 0$

2.49 $4\sin^2 2x - 7\sin 2x\cdot\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0$

2.50 $6\sin^2 x + 13\sin x\cdot\cos x + 7\cos^2 x = 1$

<u>תשובות:</u>

2.48 $x = \{-63.43° + 180°K,\ 45° + 180°K\}$.

2.49 $x = \{-7° + 90°K\ ,\ 31.72° + 90°K\}$.

2.50 $x = \{-63.43° + 180°K,\ -30.96° + 180°K\}$.

תרגילים לסיכום הפרק

בתרגילים **2.51 – 2.61** פתור את המשוואות הבאות:

2.51 $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$

2.52 $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

2.53 $25\tan x - 8 = \frac{6}{\cos^2 x}$

2.54 $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$

2.55 $\sin 7x - 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$

2.56 $\cos^2 3x - \sin^2 3x + \cos 2x = 0$

2.57 $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + 2\cot 2x = 3$

2.58 $\cos^4 3x - \sin^4 3x = \sin 5x$

2.59 $\cos^2 5x + \sin^2 2x = 1$

2.60 $3 - \cos x + 5\sin\frac{x}{2} = 0$

2.61* $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin 2x$

<u>תשובות:</u>

2.51 $x = \{-30° + 360°K\ ,\ 210° + 360°K\}$.

2.52 $x = \{\pm 60° + 360°K\ ,\ 360°K\}$.

2.53 $x = \{33.69° + 180°K\ ,\ 74.05° + 180°K\}$.

2.54 $x = \{90° + 180°K\ ,\ -60° + 360°K,\ 240° + 360°K\}$.

2.55 $x = \{90°K\ ,\ 18° + 36°K\}$.

2.56 $x = \{22.5° + 45°K\ ,\ -45° + 90°K\}$.

2.57 $x = \{22.5° + 90°K\ ,\ 31.72° + 90°K\}$.

2.58 $x=\left\{\frac{90°}{11}+\frac{360°K}{11}\ ,\ -90°+360°K\right\}$. **2.59** $x=\left\{60°K\ ,\ \frac{180°K}{7}\right\}$.

2.60 $x=\{-60°+720°K\ ,\ 420°+720°K\}$. **2.61** $x=45°+180°K$.

בתרגילים **2.62 – 2.64** פתור את המשוואות הבאות:

2.62 $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0$ **2.63** $\frac{\cos 2x}{1+\tan x}=0$ **2.64*** $\tan x\cdot\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)=0$

<u>תשובות:</u> **2.62** $x=180°K$. **2.63** $x=45°+180°K$. **2.64** $x=360°K$.

בתרגילים **2.65 – 2.72** פתור את המשוואות הבאות:

2.65 $\cos 3x+\cos 2x+\cos x=0$ **2.66** $\sin 7x+\sin x=-\sqrt{3}\sin 4x$

2.67 $\cos 2x-\cos x=\sin\frac{x}{2}$ **2.68** $\sin 4x+\sin 2x=\cos 5x-\cos x$

2.69 $\sin^2 x+\sin^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$

2.70 $\frac{\sin(3x+60°)+\sin(3x-60°)}{\cos(3x+60°)+\cos(3x-60°)}=\tan(x+10°)$

2.71 $\cos 3x+2\cos x=0$

2.72 $\sin 9x-2\sin 3x=0$

<u>תשובות:</u> **2.65** $x=\{45°+90°K,\ \pm 120°+360°K\}$.

2.66 $x=\{45°K,\ \pm 50°+120°K\}$. **2.67** $x=\{360°K\ ,\ -20°+240°K\ ,\ 140°+240°K\}$.

2.68 $x=\{60°K,\ -90°+360°K,\ -30°+120°K\}$. **2.69** $x=\{45°+90°K,\ 18°+36°K\}$.

2.70 $x=5°+90°K$. **2.71** $x=\{90°+180°K,\ \pm 60°+180°K\}$.

2.72 $x=\{60°K,\ \pm 10°+60°K\}$.

בתרגילים **2.73 – 2.77** פתור את המשוואות הבאות:

2.73 $\sin 5x\cdot\cos\frac{5\pi}{9}+\cos 5x\cdot\sin\frac{5\pi}{9}=\sin\left(x-\frac{\pi}{9}\right)$

2.74 $\cos 7x \cdot \cos x - \sin 7x \cdot \sin x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2.75 $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$

2.76 $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$

2.77 $4\sin x - \cos x = 2$

__תשובות:__

2.73 $x = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi K}{2},\ \frac{5\pi}{54} + \frac{\pi K}{3}\right\}$.
2.74 $x = \left\{-\frac{\pi}{36} + \frac{\pi K}{3},\ \frac{\pi}{60} + \frac{\pi K}{5}\right\}$.

2.75 $x = \{-15° + 180°K,\ 45° + 180°K\}$.
2.76 $x = \{150° + 720°K,\ 330° + 720°K\}$.

2.77 $x = \{43° + 360°K,\ 165° + 360°K\}$.

בתרגילים 2.78 – 2.81 פתור את המשוואות הבאות:

2.78* $\cos 8x \cdot \cos 4x - \cos x \cdot \cos 3x = 0$

2.79* $\sin 6x \cdot \sin 2x = \cos 3x \cdot \cos x$

2.80* $\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2.81* $8\sin x \cdot \sin(x + 60°) \cdot \sin(x - 60°) = -1$

__תשובות:__

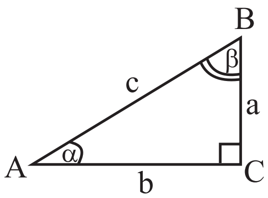
2.78 $x = \left\{36°K,\ \frac{180°}{7}K\right\}$.
2.79 $x = \{18° + 36°K,\ 30° + 60°K\}$.

2.80 $x = \{22.5° + 45°K,\ 90° + 180°K\}$.
2.81 $x = \{10° + 120°K,\ 50° + 120°K\}$.

פרק 3: בעיות טריגונומטריות במישור

בעיות טריגונומטריות במשולש ישר–זווית

בפרק 1 הגדרנו פונקציות טריגונומטריות לגבי זווית חדה במשולש ישר-זווית.



$\mathbf{sin\beta} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}$ $\mathbf{sin\alpha} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}$

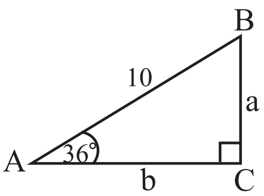
$\mathbf{cos\beta} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}$ $\mathbf{cos\alpha} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}$

$\mathbf{tan\beta} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \dfrac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{הניצב ליד הזווית}}$ $\mathbf{tan\alpha} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \dfrac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{הניצב ליד הזווית}}$

נשתמש בהגדרות הנ״ל לפתרון בעיות גיאומטריות במישור. נביא דוגמה לחישובים במשולש ישר-זווית.

דוגמה

במשולש ישר-זווית ABC שבו $\sphericalangle C = 90°$,
$\sphericalangle A = 36°$, $AB =$ 10 ס״מ, מצא את אורכי הניצבים BC ו- AC.



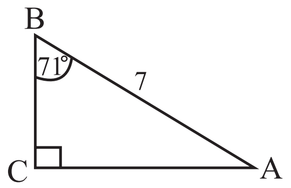
פתרון: במשולש ישר-זווית ABC נתונים אורך היתר וגודל הזווית החדה. BC הוא הניצב שמול הזווית הנתונה.
נשתמש בהגדרה של פונקציית הסינוס ונחשב את אורכו של BC:

$$\boxed{\mathbf{sin\alpha} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\text{הניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}} \quad \Rightarrow \quad \sin 36° = \frac{BC}{10} \quad \Rightarrow \quad BC = 10 \cdot \sin 36° = \underline{5.88}\ \text{ס״מ}$$

הניצב השני AC הוא הניצב שליד הזווית הנתונה. נשתמש בהגדרה של פונקציית הקוסינוס ונחשב את אורכו של AC:

$$\boxed{\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\text{הניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}} \quad \Rightarrow \quad \cos 36° = \frac{AC}{10} \quad \Rightarrow \quad AC = 10 \cdot \cos 36° = \underline{8.09}\ \text{ס״מ}$$

3.01



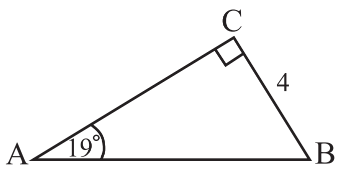
במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$,

נתון: $AB = 7$ ס"מ , $\sphericalangle B = 71°$.

חשב את AC ואת BC. מצא את שטח המשולש ABC.

<u>תשובה:</u> 6.62 ס"מ , 2.28 ס"מ, 7.547 סמ"ר.

3.02



במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$

נתון: $BC = 4$ ס"מ , $\sphericalangle A = 19°$.

חשב את אורכי הצלעות AC , AB ומצא את $\sphericalangle B$.

<u>תשובה:</u> 11.62 ס"מ, 12.29 ס"מ, $71°$.

3.03

במשולש ישר-זווית, אחד מהניצבים גדול ב-5 ס"מ מהניצב השני. אחת מהזוויות החדות היא בת $31°$. חשב את ניצבי המשולש.

<u>תשובה:</u> 7.5 ס"מ , 12.5 ס"מ.

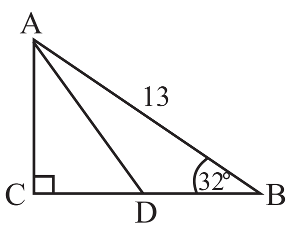
3.04

במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$, נתון: $AB = 8$ ס"מ , $AC = 5$ ס"מ .

חשב את הזוויות החדות של המשולש ומצא את שטחו.

<u>תשובה:</u> $51.32°$, $38.68°$, 15.61 סמ"ר.

3.05



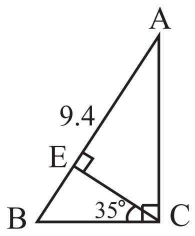
המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle C = 90°)$, AD הוא התיכון לניצב BC. נתון: $AB = 13$ ס"מ , $\sphericalangle B = 32°$

א. חשב את הזווית ADC.

ב. חשב את אורך התיכון AD.

<u>תשובה:</u> א. $51.35°$. ב. 8.82 ס"מ.

3.06



במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90°)$, CE הוא

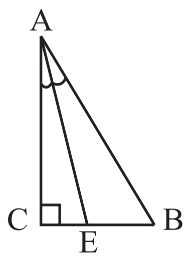
הגובה ליתר AB. נתון: $AB =$ 9.4 ס"מ , $\measuredangle BCE = 35°$.

א. חשב את אורך הניצב AC.

ב. מצא את שטח המשולש AEC.

<u>תשובה:</u> א. 7.7 ס"מ. ב. 13.945 ס"מ

3.07



במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90°)$,

AE הוא חוצה הזווית $\measuredangle BAC$.

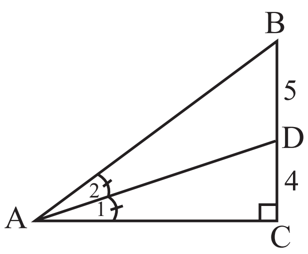
נתון: $AB =$ 11.6 ס"מ , $BC =$ 7.4 ס"מ.

א. חשב את AE.

ב. מצא את שטח המשולש ABE.

<u>תשובה:</u> א. 9.49 ס"מ. ב. 18.66 סמ"ר.

3.08



במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90°)$,

AD הוא חוצה הזווית $\measuredangle BAC$ $(\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2)$.

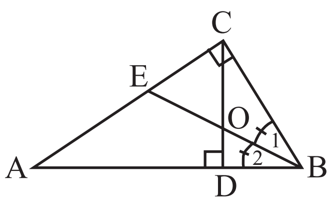
נתון: $BD =$ 5 ס"מ , $CD =$ 4 ס"מ.

א. חשב את הזווית $\measuredangle B$.

ב. חשב את AD.

<u>תשובה:</u> א. 53.13°. ב. 12.65 ס"מ.

3.09



ABC הוא משולש ישר-זווית $(\measuredangle C = 90°)$,

הקטע BE הוא חוצה הזווית ABC $(\measuredangle B_1 = \measuredangle B_2)$.

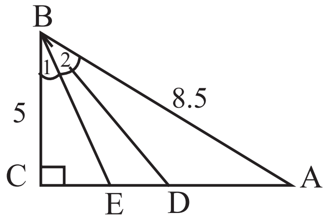
CD הוא הגובה ליתר AB. הקטעים נפגשים בנקודה O.

נתון: $BD =$ 2.43 ס"מ , $OB =$ 3 ס"מ.

חשב את אורך הקטע OE.

<u>תשובה:</u> 6.6 ס"מ.

3.10



במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$, BD הוא התיכון

לניצב AC, ו- BE הוא חוצה הזווית ABC $(\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2)$.

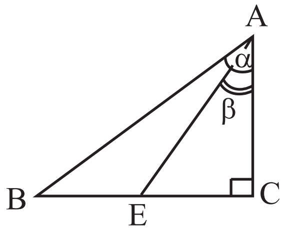
נתון: $BC = 5$ ס"מ , $AB = 8.5$ ס"מ.

א. חשב את הזווית EBD.

ב. חשב את שטח המשולש EBD.

<u>תשובה:</u> א. $7.54°$. ב. 2.23 סמ"ר.

3.11



במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$ העבירו קטע AE.

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle EAC = \beta$, $\tan\alpha = 2\tan\beta$.

הוכח כי $BE = EC$.

חישובים במשולש שווה–שוקיים

3.12

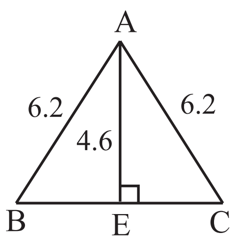
במשולש שווה-שוקיים ABC , נתון: $\sphericalangle BAC = 48°$, $AB = AC = 7$ ס"מ.

א. חשב את הגובה לבסיס BC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

<u>תשובה:</u> א. 6.39 ס"מ. ב. 18.21 סמ"ר.

3.13



במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,

AE הוא הגובה לבסיס BC.

נתון: $AB = 6.2$ ס"מ , $AE = 4.6$ ס"מ

א. חשב את זוויות המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

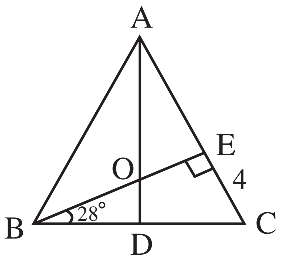
<u>תשובה:</u> א. $84.2°, 47.9°, 47.9°$. ב. 19.14 סמ"ר.

3.14

חשב את הזוויות של משולש שווה-שוקיים שבו חוצה זווית הראש שווה באורכו לבסיס.

תשובה: $53.14°$, $63.43°$, $63.43°$.

3.15



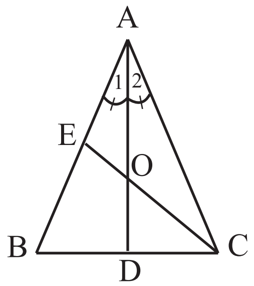
$\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$. AD הוא תיכון לבסיס BC, BE הוא גובה לשוק AC והם נפגשים בנקודה O.

נתון: $EC = 4$ ס"מ , $\sphericalangle EBC = 28°$.

חשב את אורך הקטע AO.

תשובה: 5.74 ס"מ.

3.16



במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, AD הוא חוצה זווית הראש $(\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2)$, CE הוא התיכון לשוק AB. הקטעים נפגשים בנקודה O. נתון: $AD = 9$ ס"מ , $CE = 6.3$ ס"מ.

חשב את גודל הזווית AEC.

תשובה: $117.49°$.

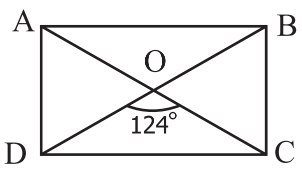
3.17

במשולש שווה-שוקיים, אורך השוק שווה ל- a וזווית הבסיס היא β. הבע את היקף המשולש ואת שטחו באמצעות a ו- β.

תשובה: $P = 2a\left(1+\cos\beta\right)$; $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\beta$.

חישובים במרובעים

3.18

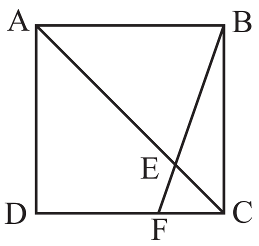


במלבן $ABCD$ נתון: $AC = 14$ ס"מ , $\sphericalangle DOC = 124°$.

חשב את צלעותיו של המלבן.

תשובה: 6.57 ס"מ , 12.36 ס"מ.

3.19



בריבוע $ABCD$ הקטע BF חותך את האלכסון AC

בנקודה E. נתון: $CF=\frac{1}{2}DF$.

חשב את זוויות המשולש ABE.

<u>תשובה:</u> $45°$, $71.57°$, $63.43°$.

3.20

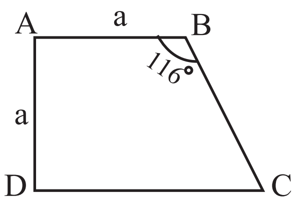
האלכסון הקטן במעוין הוא 7.2 ס"מ והזווית הקהה היא $136°$.

א. מצא את האלכסון הגדול של המעוין.

ב. מצא את גובה המעוין.

<u>תשובה:</u> א. 17.82 ס"מ.   ב. 6.68 ס"מ.

3.21



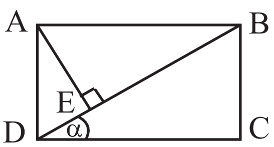
בטרפז ישר-זווית $ABCD$ $\left(AB \parallel CD\ \ ,\sphericalangle D=90°\right)$

נתון: $AB=AD=a$, $\sphericalangle ABC=116°$.

הבע את היקף הטרפז באמצעות a.

<u>תשובה:</u> $P=4.6a$.

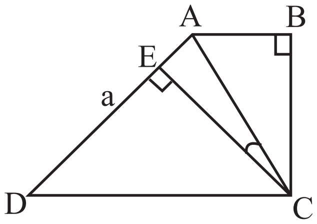
3.22



במלבן $ABCD$ נתון: $AE\perp BD$, $\sphericalangle BDC=\alpha$.

הוכח כי: $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{2}\cos^2\alpha$

3.23



בטרפז ישר-זווית $ABCD$ $(AB \parallel CD, \sphericalangle B=\sphericalangle C=90°)$

נתון: $CE\perp AD$, $AD=a$, $\frac{AE}{DE}=\frac{3}{7}$, $\sphericalangle ACE=24°$.

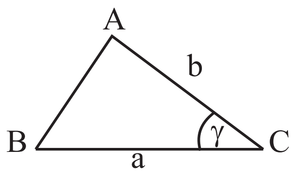
הבע את בסיסי הטרפז באמצעות a.

<u>תשובה:</u> $0.25a$, $0.97a$.

שטח משולש על–פי שתי צלעות וזווית שביניהן

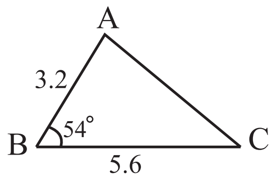
שטח משולש שווה למחצית מכפלת שתיים מצלעותיו
בסינוס הזווית הכלואה ביניהן.

$$\mathbf{S_{\triangle} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma}$$



דוגמה

במשולש ABC נתון: $AB = 3.2$ ס"מ , $BC = 5.6$ ס"מ ,
$\measuredangle B = 54^\circ$. חשב את שטח המשולש.



פתרון: שטח המשולש הוא:

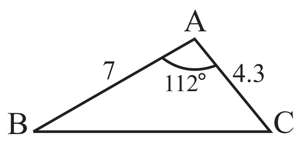
$$\Rightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin\measuredangle B \quad \Leftarrow \quad \boxed{\mathbf{S_{\triangle}= \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \underline{7.25} \text{ סמ"ר} \quad \Leftarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 3.2\cdot 5.6\cdot \sin 54^\circ \quad \Leftarrow$$

3.24

במשולש $\triangle ABC$ נתון: $AB = 7$ ס"מ , $AC = 4.3$ ס"מ ,
$\measuredangle A = 112^\circ$. חשב את שטח המשולש.

<u>תשובה:</u> 13.95 סמ"ר.



3.25

שטחו של משולש הוא 18.7 סמ"ר. שתי הצלעות שלו הן 7.2 ס"מ ו- 5.8 ס"מ.
חשב את שני הערכים האפשריים לזווית שבין שתי הצלעות הנ"ל.

<u>תשובה:</u> 63.58° או 116.42°.

מצולעים המתפרקים למשולשים ישרי-זווית

3.26

מחומש משוכלל חסום במעגל שרדיוסו 4 ס"מ.

א. חשב את שטח המחומש.

ב. חשב את היקף המחומש.

<u>תשובה:</u> א. 38.05 סמ"ר. ב. 23.5 ס"מ.

3.27

במשושה משוכלל חסום מעגל שרדיוסו 5.2 ס"מ. חשב את שטחו של המשושה.

<u>תשובה:</u> 93.6 סמ"ר.

3.28

מתומן משוכלל (מתומן - מצולע בעל 8 צלעות) חסום במעגל. היקפו של המתומן הוא 32 ס"מ.

א. חשב את שטח המעגל.

ב. חשב את שטח המתומן.

<u>תשובה:</u> א. 27.35π סמ"ר. ב. 77.36 סמ"ר.

3.29*

מצולע משוכלל בעל $2n$ צלעות ($n \geq 2$, מספר טבעי) שאורך צלעו הוא a, חוסם מעגל שרדיוסו r וחסום במעגל שרדיוסו R.

א. הבע את r ו-R באמצעות a ו-n.

ב. הוכח כי היחס בין שטח המעגל החסום במצולע הנ"ל לבין שטח המעגל החוסם את המצולע, הוא $\cos^2\left(\frac{90^\circ}{n}\right)$.

<u>תשובה:</u> א. $r = \frac{a}{2\tan\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}$; $R = \frac{a}{2\sin\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}$.

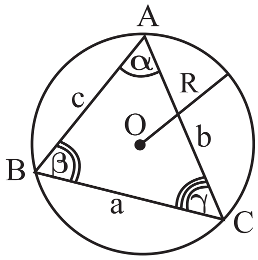
משפט הסינוסים

משפט

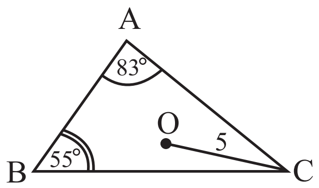
בכל משולש קיים יחס קבוע בין כל צלע לסינוס הזווית מולה. יחס זה שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם את המשולש, דהיינו:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin\alpha}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sin\beta}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sin\gamma}}=\mathbf{2R}$$

R הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.



דוגמה



רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 5 ס"מ $= R$.

נתון: $\sphericalangle A=83^\circ$, $\sphericalangle B=55^\circ$.

מצא את אורכי הצלעות של המשולש ABC

פתרון: נמצא את הזווית C במשולש ABC.

$$\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C=180^\circ \quad\Rightarrow\quad \sphericalangle C=180^\circ-(83^\circ+55^\circ)=42^\circ$$

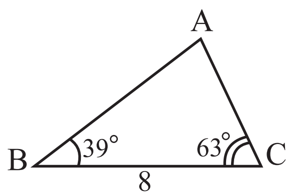
בהסתמך על משפט הסינוסים, נמצא את אורכי הצלעות של המשולש ABC :

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle C}=2R \quad\Rightarrow\quad AB=2R\cdot\sin\sphericalangle C=2\cdot5\cdot\sin42^\circ \quad\Rightarrow\quad AB=\underline{6.69}\text{ ס"מ}$$

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle B}=2R \quad\Rightarrow\quad AC=2R\cdot\sin\sphericalangle B=2\cdot5\cdot\sin55^\circ \quad\Rightarrow\quad AC=\underline{8.19}\text{ ס"מ}$$

$$\frac{BC}{\sin\sphericalangle A}=2R \quad\Rightarrow\quad BC=2R\cdot\sin\sphericalangle A=2\cdot5\cdot\sin83^\circ \quad\Rightarrow\quad BC=\underline{9.93}\text{ ס"מ}$$

3.30



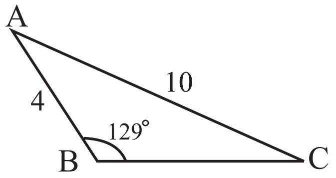
במשולש ABC נתון: $\sphericalangle B=39^\circ$, $\sphericalangle C=63^\circ$, 8 ס"מ $= BC$.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC

וחשב את אורכי הצלעות AB ו-AC.

<u>תשובה:</u> 4.09 ס"מ $= R$, 7.29 ס"מ $= AB$, 5.15 ס"מ $= AC$.

3.31



במשולש ABC נתון: $AB = 4$ ס"מ , $AC = 10$ ס"מ, $\sphericalangle B = 129°$.
חשב את הזוויות הנותרות, ואת שטחו של המשולש.

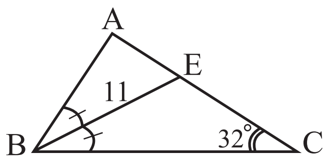
<u>תשובה:</u> 18.12°, 32.88°, 10.86 סמ"ר.

3.32

שתי צלעות של משולש הן $a = 4.8$ ס"מ, $b = 6.4$ ס"מ. רדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא $R = 4.2$ ס"מ. חשב את זוויות המשולש.

<u>תשובה:</u> 14.82° , 130.36° , 34.82° או 95.54° , 49.64° , 34.82°

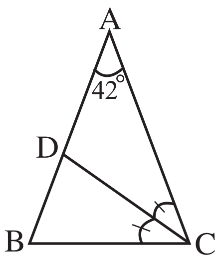
3.33



במשולש ABC נתון: $\sphericalangle ABC = 76°$, $\sphericalangle ACB = 32°$.
BE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ABC$ ואורכו 11 ס"מ.
חשב את אורכי הצלעות AB ו- BC.

<u>תשובה:</u> $AB = 10.87$ ס"מ , $BC = 19.51$ ס"מ.

3.34

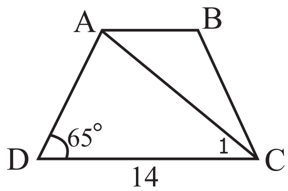


במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, CD חוצה הזווית $\sphericalangle ACB$. נתון: $\sphericalangle BAC = 42°$ ורדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא $R = 6.5$ ס"מ.

א. חשב את אורכו של CD.
ב. חשב את שטח המשולש ACD.

<u>תשובה:</u> א. 8.35 ס"מ. ב. 28.71 סמ"ר.

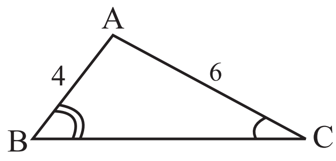
3.35



בטרפז שווה-שוקיים ABCD $(AB \parallel CD)$
נתון: $CD = 14$ ס"מ , $\sphericalangle ADC = 65°$, $\sphericalangle C_1 = 45°$.
חשב את היקף הטרפז.

<u>תשובה:</u> 40.15 ס"מ.

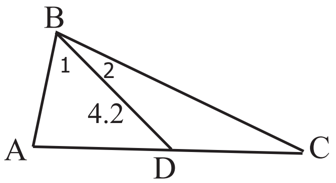
3.36*



במשולש ABC נתון: $AB = 4$ ס"מ , $AC = 6$ ס"מ , $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$. חשב את אורך הצלע BC.

<u>תשובה:</u> 5 ס"מ.

3.37



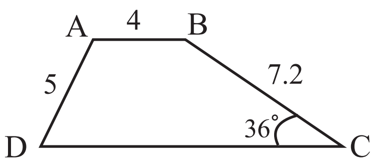
BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC.

נתון: $BD = 4.2$ ס"מ, $\sphericalangle B_1 = 50°$, $\sphericalangle B_2 = 18°$.

חשב את שטח המשולש ABC.

<u>תשובה:</u> 9 סמ"ר.

3.38

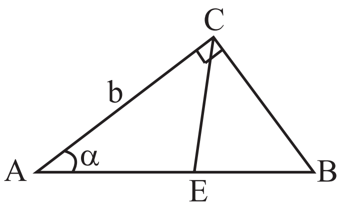


בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ נתון: $AD = 5$ ס"מ , $AB = 4$ ס"מ, $BC = 7.2$ ס"מ, $\sphericalangle C = 36°$.

חשב את גודל הזווית $\sphericalangle D$, ואת אורך הבסיס CD.

<u>תשובה:</u> $\sphericalangle D = 57.89°$, $CD = 12.48$ ס"מ.

3.39



CE הוא חוצה הזווית הישרה במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$. נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AC = b$.

הבע את CE ואת BE באמצעות b ו- α.

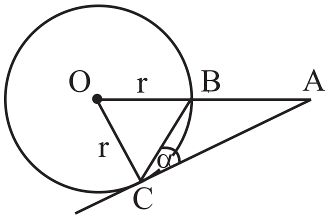
<u>תשובה:</u> $CE = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{\sin(135° - \alpha)}$; $BE = \dfrac{\sqrt{2} \cdot b \cdot \tan\alpha}{2\sin(135° - \alpha)}$.

3.40*

במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ נתון: $\sphericalangle B = \beta$.

הוכח את הזהות $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cdot \cos\beta$.

3.41



נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו r. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשכו של הרדיוס OB בנקודה A.

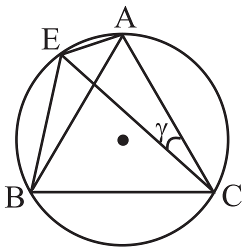
נתון $\sphericalangle ACB = \alpha$ $(\alpha < 45°)$.

א. הבע את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC באמצעות r ו-α.

ב. הבע את שטחו של המשולש ABC באמצעות r ו-α.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{r\tan 2\alpha}{2\cos\alpha}$. ב. $r^2\tan 2\alpha\sin^2\alpha$.

3.42**



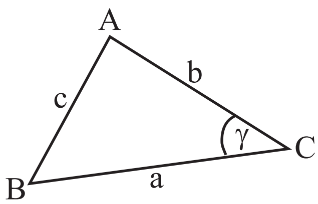
המשולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל שרדיוסו R.

E היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle ACE = \gamma$.

הוכח: $AE + BE = CE$.

משפט הקוסינוסים

משפט



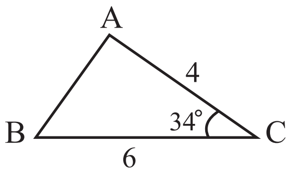
ריבוע צלע במשולש שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות פעמיים מכפלתן בקוסינוס הזווית הכלואה ביניהן, דהיינו:

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

מהמשפט נובע כי:

$$\mathbf{\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

דוגמה



במשולש ABC נתון: $AC = 4$ ס"מ , $BC = 6$ ס"מ,
$\sphericalangle C = 34°$. חשב את אורך הצלע AB .

פתרון: נשתמש במשפט הקוסינוסים ונחשב את AB :

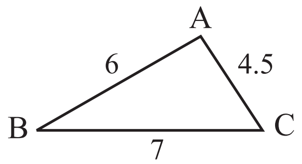
$$\boxed{\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \quad \Rightarrow \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 34° = 12.21 \quad \Rightarrow \quad AB = \underline{3.49} \text{ ס"מ}$$

3.43

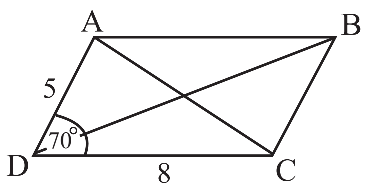
במשולש ABC נתון: $AB = 3.2$ ס"מ , $BC = 5.1$ ס"מ , $\sphericalangle B = 116°$.
חשב את אורך הצלע AC .
<u>תשובה:</u> 7.11 ס"מ.

3.44



במשולש ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ , $AC = 4.5$ ס"מ ,
$BC = 7$ ס"מ . חשב את זוויות המשולש.
<u>תשובה:</u> $82.3°$, $39.57°$, $58.13°$.

3.45

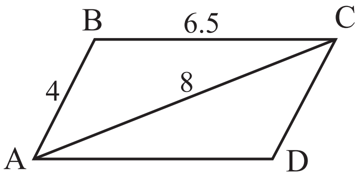


במקבילית $ABCD$ נתון: $AD = 5$ ס"מ ,
$CD = 8$ ס"מ , $\sphericalangle ADC = 70°$.
חשב את אורכי האלכסונים AC ו- BD של המקבילית.
<u>תשובה:</u> $AC = 7.85$ ס"מ , $BD = 10.79$ ס"מ .

3.46

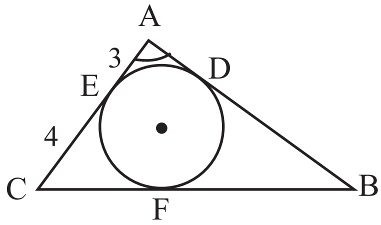
במשולש ABC נתון: $AB = 3.6$ ס"מ , $AC = 4.8$ ס"מ , $BC = 5.7$ ס"מ .
חשב את שטח המשולש ABC .
<u>תשובה:</u> 8.6 סמ"ר.

3.47



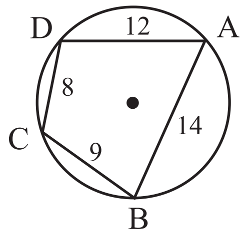
במקבילית ABCD נתון: $AB = 4$ ס"מ,
$BC = 6.5$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ.
א. חשב את גודל הזווית BAD.
ב. חשב את אורך האלכסון BD.
<u>תשובה:</u> א. $83.65°$. ב. 7.2 ס"מ.

3.48



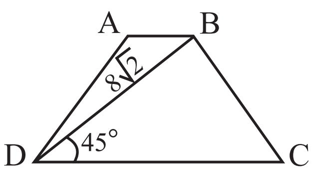
בתוך משולש ABC חסום מעגל המשיק לצלעות AB,
AC ו- BC בנקודות D, E ו- F בהתאמה.
נתון: $AE = 3$ ס"מ, $CE = 4$ ס"מ, $\sphericalangle A = 82°$.
חשב את אורכי הצלעות AB ו- BC.
<u>תשובה:</u> $AB = 12.15$ ס"מ, $BC = 13.15$ ס"מ.

3.49



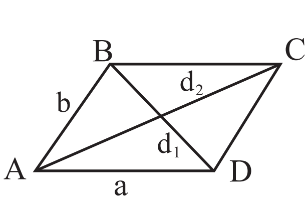
המרובע ABCD חסום במעגל. נתון: $AB = 14$ ס"מ,
$BC = 9$ ס"מ, $CD = 8$ ס"מ, $AD = 12$ ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABCD.
<u>תשובה:</u> 109.62 סמ"ר.

3.50*



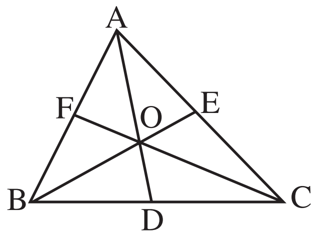
בטרפז שווה-שוקיים ABCD $(AB \parallel CD)$ האלכסון BD
שאורכו $8\sqrt{2}$ ס"מ יוצר זווית בת $45°$ עם הבסיס הגדול CD.
אורך הבסיס AB קטן ב- 8 ס"מ מכל שוק של הטרפז.
חשב את אורך הבסיס CD.
<u>תשובה:</u> $CD = 14$ ס"מ.

3.51



במקבילית ABCD נתון: $AD = a$, $AB = b$,
$BD = d_1$, $AC = d_2$.
הוכח כי: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

3.52^*

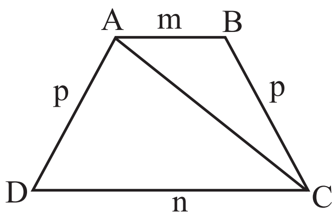


AD, BE ו-CF הם שלושת התיכונים במשולש ABC לצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה. התיכונים נפגשים בנקודה O. נתון: $AD = m_a$, $BE = m_b$, $CF = m_c$.

הוכח: $BC = \frac{2}{3}\sqrt{2{m_b}^2 + 2{m_c}^2 - {m_a}^2}$.

(הדרכה: *היעזר בתוצאה של תרגיל קודם*)

3.53^*



בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel CD)$

נתון כי $AB = m$, $CD = n$, $AD = BC = p$.

הבע את אורך אלכסון הטרפז באמצעות m , n ו-p.

<u>תשובה:</u> $\sqrt{p^2 + nm}$.

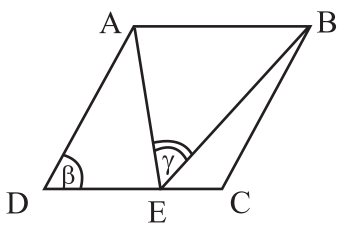
3.54^*

במשולש ABC נתון: $BC = a$, $AB = 1.5a$, $AC = ta$ $(t > 0)$.

עבור אילו ערכי t, המשולש ABC יהיה קהה זווית?

<u>תשובה:</u> $t > \frac{\sqrt{13}}{2}$ או $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3.55^*



במעוין $ABCD$ הנקודה E נמצאת על הצלע CD.

נתון: $CE = \frac{1}{3}CD$, $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle AEB = \gamma$.

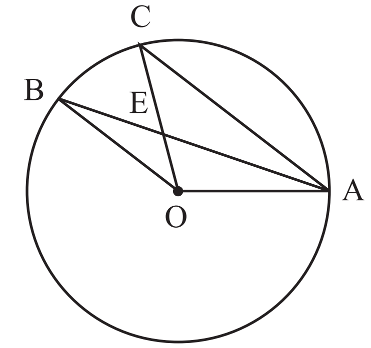
א. הבע את $\cos\gamma$ באמצעות β.

ב. מצא את הזווית γ, כאשר $\beta = 60°$.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{7 - 3\cos\beta}{\sqrt{(13 - 12\cos\beta)(10 + 6\cos\beta)}}$. ב. $54.79°$.

תרגילים לסיכום הפרק

3.56



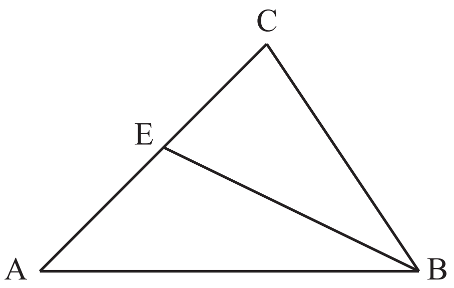
A, B ו- C הן נקודות על מעגל שמרכזו O. AB ו- OC נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle OAC = \sphericalangle BOC$, $\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle ACE}} = \frac{5}{9}$.

חשב את $\sphericalangle AEO$.

<u>תשובה:</u> $71.82°$.

3.57



במשולש ABC, BE חוצה את הזווית ABC.

נתון: $AC = b$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle AEB = \gamma$.

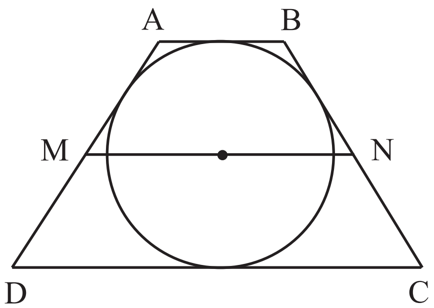
א. הבע את BE באמצעות b, β ו- γ.

ב. נתון: $AE = EC$, $\beta = \frac{2}{3}\gamma$.

הבע את BE באמצעות b.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{b \cdot \sin\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$. ב. $\frac{b\sqrt{3}}{2}$.

3.58



בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ חסום מעגל שרדיוסו R. קטע האמצעים MN מחלק את $ABCD$ לשני טרפזים $ABNM$ ו- $MNCD$ (ראה ציור).

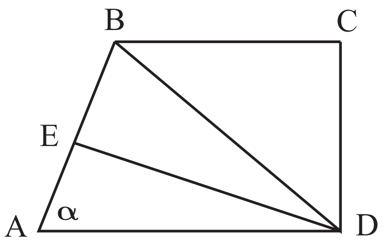
נתון: $\sphericalangle BAD = \alpha$ $(90° < \alpha < 180°)$.

א. הבע את שטחי הטרפזים $ABNM$ ו- $MNCD$ באמצעות R ו- α.

ב. נתון: $\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{2}{3}$. חשב את α.

<u>תשובה:</u> א. $S_{ABNM} = R^2 \cdot \left(\frac{2+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$, $S_{MNCD} = R^2 \cdot \left(\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. ב. $113.58°$.

3.59



בטרפז ישר-זווית ABCD $\left(\sphericalangle C = 90°\ ,\ AD \parallel BC\right)$,

DE חוצה את הזווית ADB (ראה ציור).

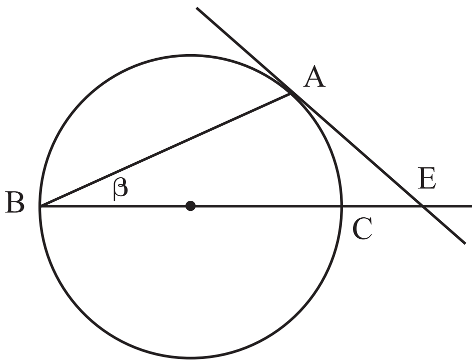
נתון: $AD = BD\ ,\ DE = m\ ,\ \sphericalangle A = \alpha\ \ (\alpha > 45°)$.

א. הראה כי שטח הטרפז שווה ל- $m^2 \sin 2\alpha$.

ב. נתון: $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{8}$. חשב את α.

<u>תשובה:</u> ב. $63.43°$.

3.60



נתון מעגל שקוטרו BC. AB הוא מיתר במעגל זה.
המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הקוטר BC
בנקודה E. נתון: $\sphericalangle B = \beta\ ,\ CE = m\ \ \left(0° < \beta < 45°\right)$.

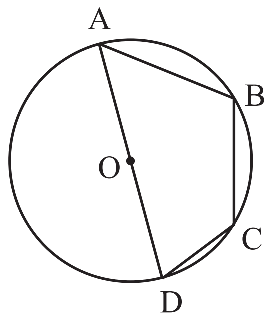
א. (i). הראה כי רדיוס המעגל שווה ל- $\frac{m\cos\beta}{1-\cos 2\beta}$.

(ii). חשב את β שעבורה רדיוס המעגל שווה ל- m.

ב. הראה כי שטח המשולש ABE הוא: $\frac{m^2\cos 2\beta}{2\tan^3\beta}$.

<u>תשובה:</u> א. (ii). $\beta = 30°$.

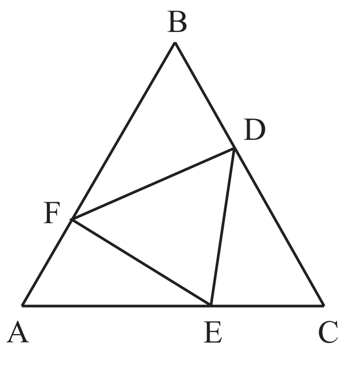
3.61



מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O כך ש- AD הוא קוטר
במעגל (ראה ציור). נתון: $CD = a\ ,\ \sphericalangle BAD = \alpha\ ,\ \sphericalangle ADC = \gamma$
הראה כי היקף המרובע ABCD הוא:

$$\frac{a}{\cos\gamma}\cdot\left[1+\cos\alpha+\cos\gamma-\cos\left(\alpha+\gamma\right)\right]$$

3.62



במשולש שווה-צלעות ABC חסום משולש שווה-צלעות DEF
(ראה ציור). נתון: $\sphericalangle AEF = \alpha$.

א. הוכח כי $\frac{EF}{AB} = \frac{1}{2\cos\left(60°-\alpha\right)}$.

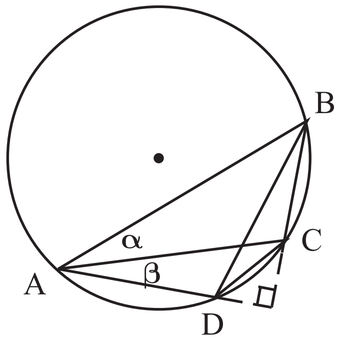
ב. נתון: $\frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$.

(i). חשב את α.

(ii). מה התכונה ההנדסית של הנקודות D, E, ו-F
עבור התוצאה שקיבלת ב-(i).

<u>תשובה:</u> ב. (i) $60°$. (ii). אמצעי הצלעות.

3.63



מרובע ABCD חסום במעגל, כך שהצלעות AD ו- BC נמצאות על ישרים הניצבים זה לזה (ראה ציור).

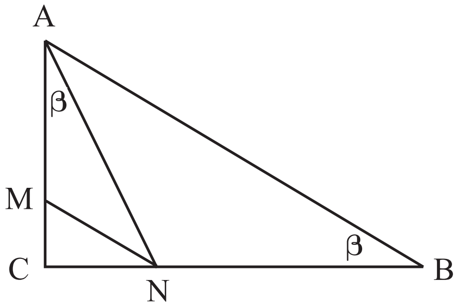
נתון: $AD = m$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle DAC = \beta$.

א. הבע את האלכסונים BD ו- AC באמצעות m, α ו- β.

ב. הראה כי $\frac{BD}{AC} = \tan(\alpha+\beta)$.

<u>תשובה:</u> א. $BD = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$, $AC = \frac{m\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$.

3.64



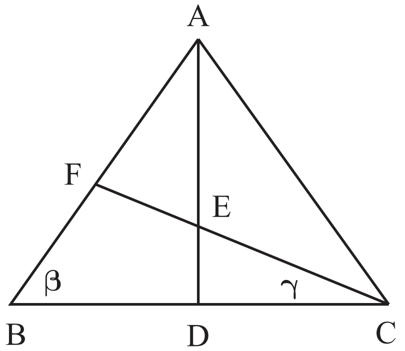
במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$ נתון:
$\sphericalangle NAC = \sphericalangle B = \beta$, $MN \parallel AB$ (ראה ציור).

א. הראה כי: $\frac{S_{\triangle ANM}}{S_{\triangle BAN}} = \frac{S_{\triangle NAC}}{S_{\triangle ABC}} = \tan^2\beta$.

ב. נתון כי $\frac{S_{\triangle MCN}}{S_{\triangle ANM}} = \frac{1}{2}$. חשב את β.

<u>תשובה:</u> ב. 30°.

3.65



במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, AD הוא גובה לבסיס BC. CF חותך את AD בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $BC = 2a$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle FCB = \gamma$.

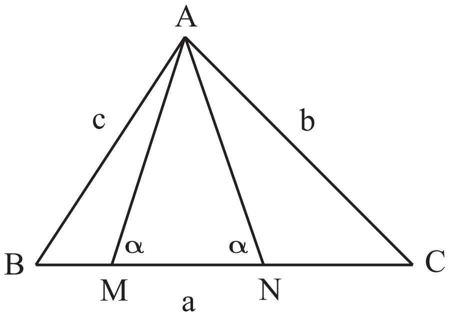
א. הבע את היחס $\frac{ED}{AD}$ באמצעות β ו- γ.

ב. הבע את AB ו- FB באמצעות a, β ו- γ.

ג. נתון: $\frac{ED}{AD} = \frac{2}{7}$. הראה כי $\frac{FB}{AB} = \frac{4}{9}$ (היעזר בסעיפים א' וב').

<u>תשובה:</u> א. $\frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$. ב. $AB = \frac{a}{\cos\beta}$, $FB = \frac{2a\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

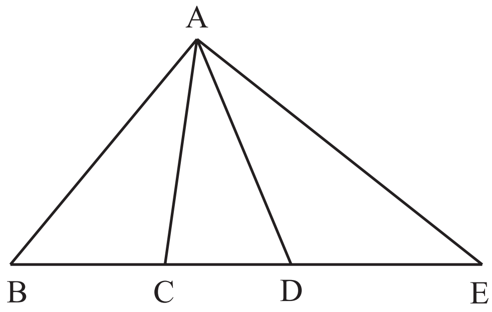
3.66



במשולש ABC, a , b ו- c הם אורכי הצלעות BC, AC ו- AB בהתאמה. R הוא רדיוס במעגל החוסם את $\triangle ABC$. הנקודות M ו- N נמצאות על הצלע BC כך ש- $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM = \alpha$ (ראה ציור).

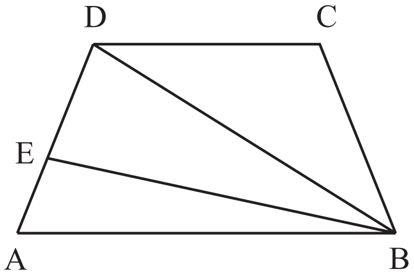
הוכח: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{a\cdot R\cdot\tan\alpha}{b\cdot c}$.

3.67



הנקודות B , C , D , E נמצאות על ישר אחד.
הנקודה A נמצאת מחוץ לישר. חיברו את A עם כל הנקודות הנ"ל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE = 30^\circ$.
הוכח: $\frac{BC \cdot DE}{BD \cdot CE} = \frac{1}{3}$.

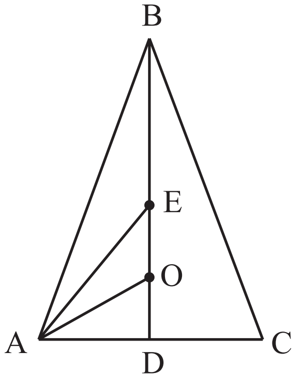
3.68



בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$, E נקודה כלשהי על השוק AD. נתון: $AD = BC = CD$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle ABE = \beta$.
הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש DEB לבין שטח המשולש AEB.

<u>**תשובה:**</u> $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) \cdot \sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \sin\beta}$.

3.69



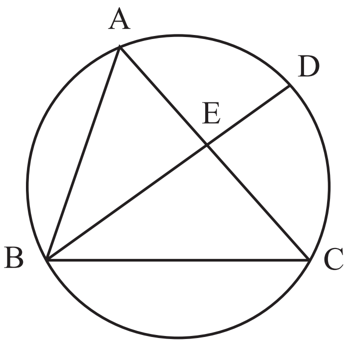
במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = BC)$ נקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש, נקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש. נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $OE = a$.

א. הבע את אורכי הקטעים AO ו- AE באמצעות a ו- α.
ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום במשולש לבין רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

<u>**תשובה:**</u> א. $AO = \frac{-a\sin 2\alpha}{\cos\frac{3\alpha}{2}}$, $AE = \frac{-a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}}$.

ב. $\sin 2\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$.

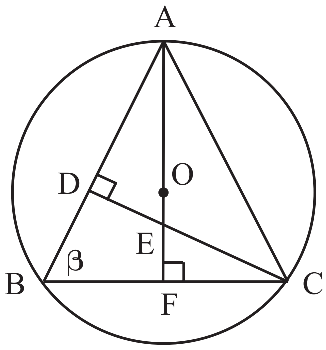
3.70



משולש ABC חסום במעגל בעל רדיוס R. נתון:
$\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = 2\beta$, BE חוצה את הזווית ABC.
המשכו של BE חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: $BD = 2R\sin(\alpha + \beta)$.
ב. הוכח: $EC = \frac{2R\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.
ג. הוכח: $ED = \frac{2R\sin^2\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

3.71



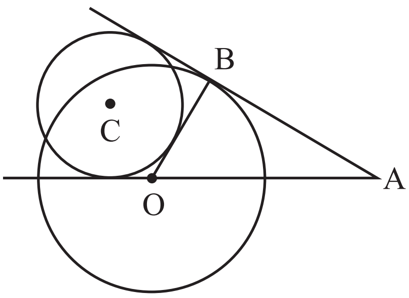
במעגל שמרכזו O ורדיוסו R חסום משולש שווה-שוקיים ABC שבו $AB=AC$, $\sphericalangle ABC=\beta$. נקודה E היא נקודת מפגש של גבהים במשולש הנ"ל (ראה ציור).

א. הבע את AE באמצעות R ו-β.

ב. הבע את שטח המשולש COE באמצעות R ו-β.

<u>תשובה:</u> א. $-2R\cos 2\beta$. ב. $-R^2\sin 3\beta\cdot\cos\beta$.

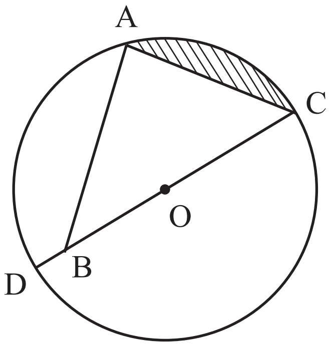
3.72



נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. מנקודה A שמחוץ למעגל העבירו משיק AB וישר AO. חיברו את O עם B. מעגל נוסף שמרכזו C ורדיוסו r משיק ל-OB ומשיק להמשכי הקטעים AB ו-AO (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle A=\alpha$.

הראה כי: $r=\frac{R}{2}\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.73



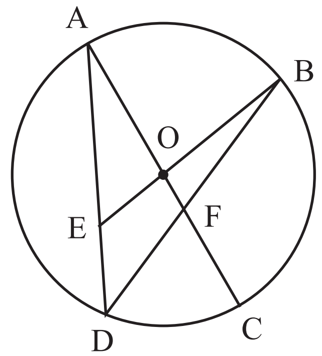
הקודקודים A ו-C של משולש ABC נמצאים על היקפו של מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. הקודקוד השלישי B נמצא על הקוטר CD (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$ (α ו-β זוויות ברדיאנים).

א. הבא את שטח המשולש ABC באמצעות R, α ו-β.

ב. נתון: $\alpha=\frac{5\pi}{12}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$. הבע את השטח החסום בין הקשת AC לבין המיתר AC (השטח המקווקו שבציור) באמצעות R.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{R^2\sin\left(2\alpha+2\beta\right)\cdot\cos\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}$. ב. $\frac{R^2\cdot\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}$.

3.74



AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. AD ו-BD שני מיתרים במעגל זה. המשכו של הרדיוס OB חותך את המיתר AD בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $BE\perp AC$, $\sphericalangle DAC=\alpha$.

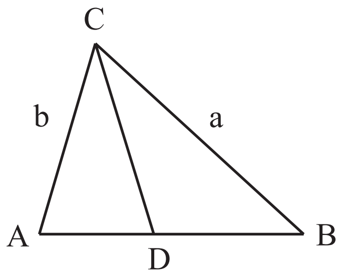
א. הבע את שטח המשולש BED באמצעות R ו-α.

ב. חשב את הזווית α שעבורה $OE=OF$.

ג. עבור α שחישבת בסעיף ב', מצא את היחס: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta BDE}}$.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{\sqrt{2}\cdot R^2\sin^2(\alpha+45°)\cdot\sin(45°-\alpha)}{\cos\alpha}$. ב. $22.5°$. ג. 1.

3.75

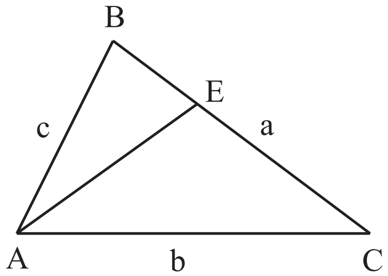


CD חוצה את הזווית C במשולש שונה צלעות ABC.

נתון: $AC=b$, $BC=a$, $\sphericalangle C=\gamma$.

הוכח: $CD=\frac{2ab\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

3.76

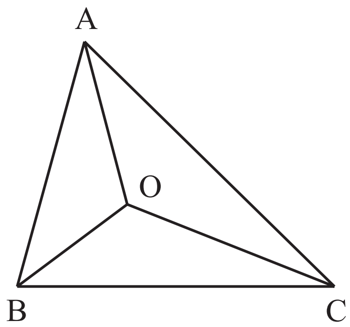


במשולש ABC, E היא נקודה על צלע BC כך ש- $AE=EC$

נתון: $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ $(a>c)$ (ראה ציור).

הוכח כי: $BE=\frac{a(a^2-c^2)}{a^2+b^2-c^2}$.

3.77



הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

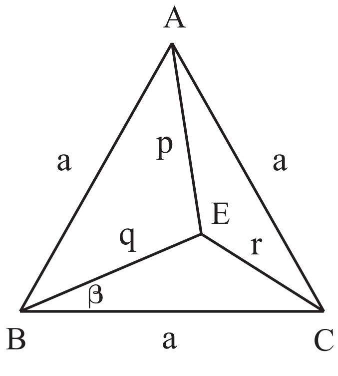
זוויות המשולש הן: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$.

א. הראה כי $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$.

ב. נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא r.
הבע את המכפלה $OA\cdot OB\cdot OC$ באמצעות r,α,β ו- γ.

<u>תשובה:</u> ב. $\frac{r^3}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$.

3.78



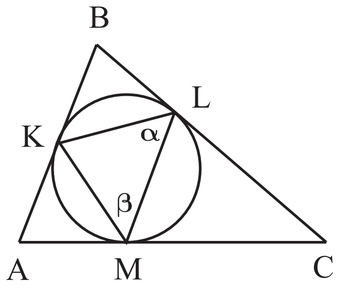
E נקודה כלשהי בתוך משולש שווה-צלעות ABC, שאורך צלעו a. נתון: $AE=p$, $BE=q$, $CE=r$, $\sphericalangle EBC=\beta$.

א. הראה כי $a=\frac{p^2-r^2}{2q\cdot\sin(30°-\beta)}$.

ב. נתון: $\beta=15°$. הבע את שטח המשולש BEC באמצעות r ו- p.

<u>תשובה:</u> ב. $\frac{p^2-r^2}{4}$.

3.79



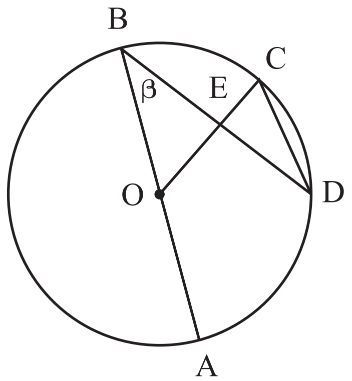
משולש חד-זווית ABC חוסם מעגל שרדיוסו r. הנקודות K , L , M הן נקודות ההשקה.

נתון: $\sphericalangle KLM=\alpha$, $\sphericalangle KML=\beta$ (ראה ציור).

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$ הוא:

$$R=\frac{-r}{4\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

3.80



AB הוא קוטר במעגל שמרכז O ורדיוסו R. המיתר BD חותך את הרדיוס OC בנקודה E (ראה ציור).

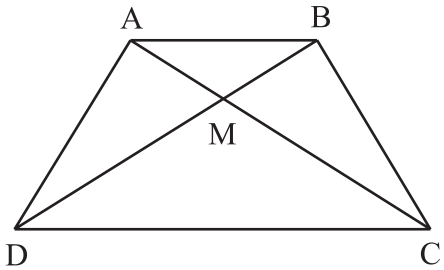
נתון: $\sphericalangle BOC=60^\circ$, $\sphericalangle OBD=\beta$.

א. הבע את שטח המשולש CDE באמצעות R ו- β.

ב. מהו שטח המשולש CDE כאשר $\beta=30^\circ$.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{R^2\sin(120^\circ-2\beta)\cdot\cos(30^\circ+\beta)}{2\sin(60^\circ+\beta)}$. ב. $\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.

3.81



בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AB\parallel CD)$ שאלכסוניו נחתכים בנקודה M, נתון: $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle CAD=\beta$.

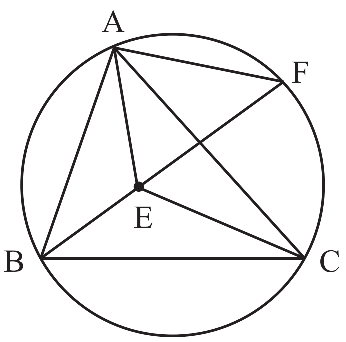
א. הוכח כי היחס בין שטח המשולש CMD לבין שטח המשולש AMB הוא: $\frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle AMB}}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(2\alpha+\beta)}$.

ב. הוכח כי היחס בין שטח המשולש CBD לבין שטח המשולש AMD הוא: $\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle AMD}}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}$.

ג. נתון גם: $\alpha=15^\circ$, $\sqrt{\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle AMD}}}=\frac{10}{9}$. חשב את β.

<u>תשובה:</u> ג. 86.11°.

3.82



משולש ABC חסום במעגל. E היא נקודת המפגש של חוצי הזוויות הפנימיות במשולש זה. הישר BE חותך את המעגל בנקודה F (ראה ציור).

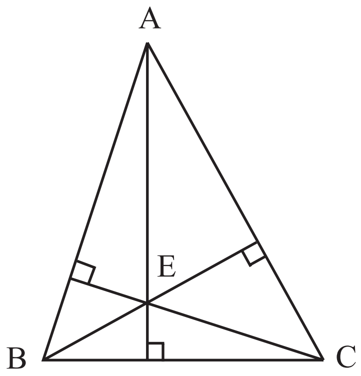
נתון: $BC=m$, $\sphericalangle ABC=2\beta$, $\sphericalangle ACB=2\gamma$.

א. הבע את AE באמצעות m , β ו- γ.

ב. הראה כי $\triangle AEF$ הוא משולש שווה-שוקיים והבע את היקפו באמצעות m , β ו- γ.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{2m\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin(2\beta+2\gamma)}$. ב. $\frac{2m\sin\beta\cdot(1+\sin\gamma)}{\sin(2\beta+2\gamma)}$.

3.83

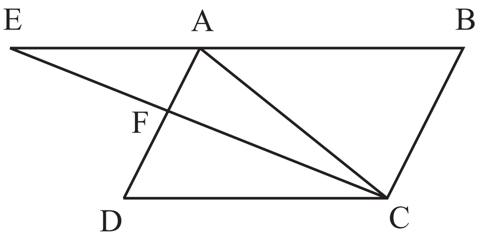


במשולש ABC נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$.
α , β , γ הן זוויות חדות. נקודה E היא נקודת חיתוך גבהים במשולש.

א. הוכח: $\frac{AE}{\cos\alpha}=\frac{BE}{\cos\beta}=\frac{CE}{\cos\gamma}$.

ב. נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$.
הראה כי המשולשים ABE , ACE , BCE ניתן לחסום במעגלים בעלי רדיוס R.

3.84



במקבילית ABCD נתון: $AB=a$, $BC=b$, $\sphericalangle B=\beta$ (β חדה). מקודקוד C העבירו ישר החותך את הצלע AD בנקודה F, וחותך את המשכה של הצלע AB בנקודה E (ראה ציור). שטח המרובע ABCF הוא $\frac{2}{5}ab$

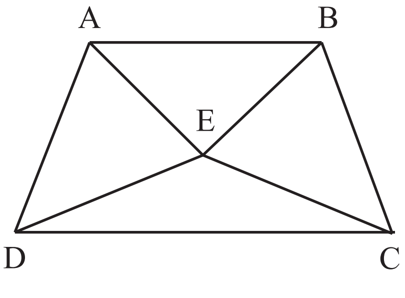
א. הבע את עורך הקטע BE באמצעות a , b ו- β.

ב. נתון: $\frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$. חשב את β.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{5a\sin\beta}{2(5\sin\beta-2)}$. ב. $36.87°$.

3.85

נתון משולש שווה-שוקיים DEC $(DE=EC)$ שבו $DC=m$, $\sphericalangle DEC=\theta$. על השוקיים של משולש זה בנו משולש שווי-צלעות AED ו- BEC (ראה ציור).



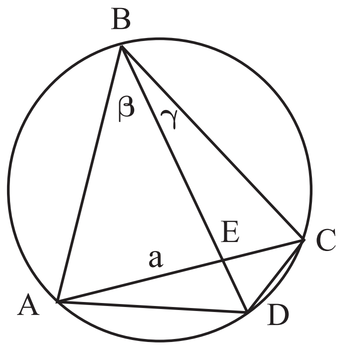
א. הוכח כי $AB\parallel CD$.

ב. הבע את AB באמצעות m ו- θ.

ג. נתון: $S_{\triangle AEB}=S_{\triangle DEC}$.
(i) חשב את θ.
(ii) מה המשמעות ההנדסית של התוצאה שקיבלת לגבי המרובע ABCD.

<u>תשובה:</u> ב. $\frac{m\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}-30°\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$. ג. ($i$) $120°$. (ii) מלבן.

3.86



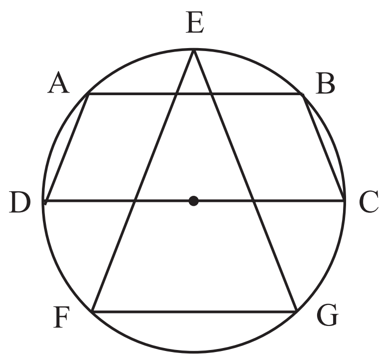
מרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה E. נתון: $AB = BC$, $AE = a$, $\sphericalangle ABD = \beta$, $\sphericalangle CBD = \gamma$.

א. הבע את EC באמצעות α , β ו-γ.

ב. הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המרובע ABCD הוא: $R = \dfrac{a\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{2\sin\beta\cdot\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$.

<u>תשובה:</u> א. $\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$.

3.87



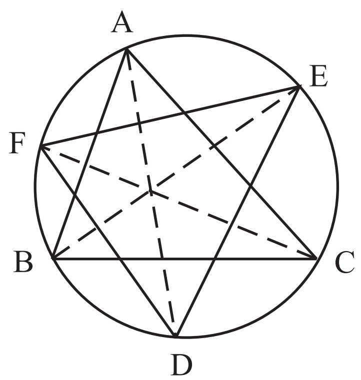
טרפז ABCD ומשולש שווה-שוקיים EFG $(EF = EG)$ חסומים במעגל. הבסיס הגדול CD של הטרפז הוא קוטר במעגל ומקביל לבסיס FG של המשולש. שוקי הטרפז מקבילות לשוקי המשולש. נתון: $FG = m$, $\sphericalangle G = \gamma$.

א. הבע את שוקי הטרפז באמצעות m ו-γ.

ב. הראה כי שטח הטרפז שווה לשטח המשולש והבע את השטח באמצעות m ו-γ.

<u>תשובה:</u> א. $AD = BC = \dfrac{m}{2\sin\gamma}$. ב. $\dfrac{1}{4}m^2\tan\gamma$.

3.88

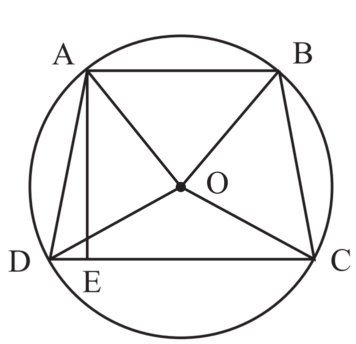


משולש ABC חסום במעגל. חוצי הזוויות $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ ו-$\sphericalangle C$ חותכים את המעגל בנקודות D, E ו-F בהתאמה (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle A = 2\alpha$, $\sphericalangle B = 2\beta$, $\sphericalangle C = 2\gamma$.

א. הראה כי היחס בין היקף המשולש ABC לבין היקפו של המשולש DEF הוא: $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}$.

ב. הראה כי היחס בין שטח המשולש ABC לבין שטח המשולש DEF הוא: $8\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

3.89

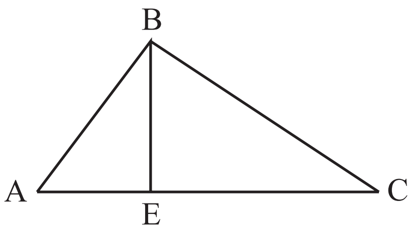


טרפז ABCD חסום במעגל שמרכזו O. AE הוא גובה בטרפז (ראה ציור). נתון: $AE = h$, $\sphericalangle AOB = 2\alpha$, $\sphericalangle COD = 2\beta$.

א. הראה כי רדיוס המעגל שווה ל-$\dfrac{h}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

ב. הראה כי שטח הטרפז ABCD הוא: $h^2\tan\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}\right)$.

3.90



BE הוא גובה לצלע AC במשולש ABC (ראה ציור)

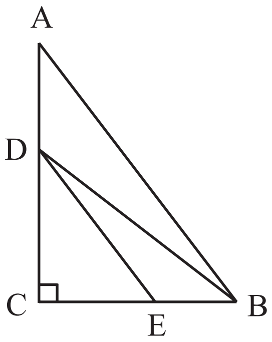
נתון: $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A + 45°$.

א. הראה כי $\frac{BE}{AE} = \frac{a}{b\sqrt{2} - a}$.

ב. נתון: $a = 3$, $b = 4$. חשב את זוויות המשולש ABC .

<u>תשובה:</u> ב. $48.47°$, $93.47°$, $38.06°$.

3.91



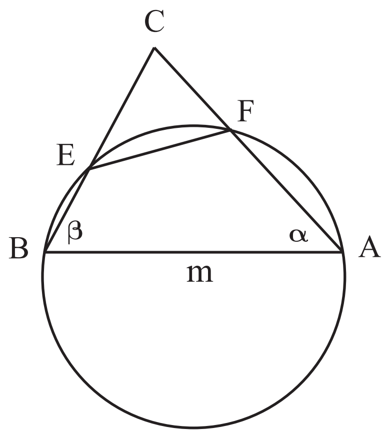
במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$ העבירו BD כך ש-$\sphericalangle CBD = \sphericalangle A$. מנקודה D העבירו DE המקביל ל-AB (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle A = \alpha$ $\left(0° < \alpha < 45°\right)$.

א. הראה כי: $\frac{S_{\triangle ECD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha}$.

ב. חשב את α אם ידוע ש-$S_{\triangle ECD} = S_{\triangle ABD}$.

<u>תשובה:</u> ב. $38.17°$.

3.92



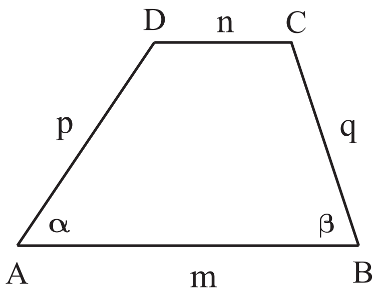
AB מיתר במעגל. חיברו נקודה C עם הנקודות A ו-B .
הנקודות E ו-F הן נקודות החיוך של BC ו-AC עם המעגל בהתאמה. נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $AB = m$, $S_{ABEF} = Q$.

א. הראה כי: $EF^2 = m^2 - \frac{2Q \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$.

ב. נתון כי: $EF = $ 6 ס"מ , $m = $ 8 ס"מ , $\alpha = 45°$,
$Q = 12\left(3 - \sqrt{3}\right)$ סמ"ר . חשב את β .

<u>תשובה:</u> ב. $60°$.

3.93

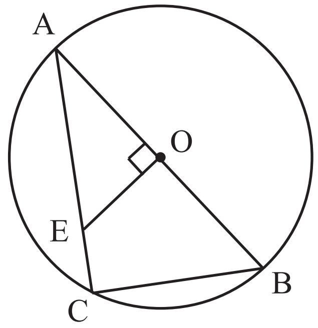


בטרפז ABCD $\left(AB \parallel CD\right)$ נתון: $AB = m$, $CD = n$,
$AD = p$, $BC = q$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

א. הראה כי: $\frac{1}{2}\left(m^2 + n^2 - p^2 - q^2\right) = mn + pq \cdot \cos\left(\alpha + \beta\right)$

ב. נתון כי בטרפז ABCD ניתן לחסום מעגל. הראה כי:
$\frac{mn}{pq} = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$

3.94



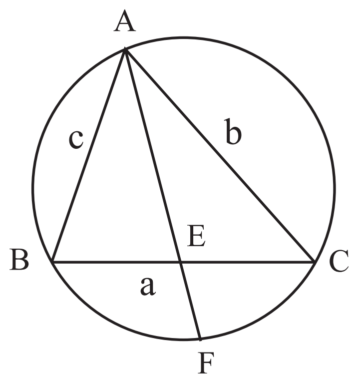
מעגל שמרכזו O ורדיוסו R חוסם משולש ABC כך שמרכז המעגל נמצא על צלע AB. נתון: $OE \perp AB$, מעגל החסום ב- $\triangle ABC$ משיק ל- OE.

א. חשב את זוויות המשולש ABC.

ב. הבע את רדיוס המעגל החסום ב- $\triangle ABC$ באמצעות R.

<u>תשובה:</u> א. $30°$, $60°$, $90°$. ב. $0.365R$.

3.95



משולש ABC חסום במעגל. AE חוצה את הזווית BAC וחותך את המעגל בנקודה F (ראה ציור).

נתון: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

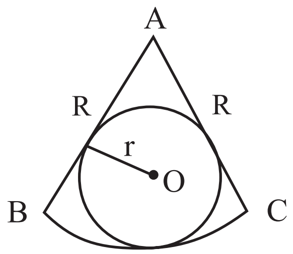
א. הבע את המכפלה $AE \cdot EF$ באמצעות a , b ו- c.

ב. נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. הראה כי:

$$AE = \frac{2bc \cdot \cos\alpha}{b+c} \ , \ EF = \frac{a^2}{2(b+c)\cdot\cos\alpha}.$$

<u>תשובה:</u> א. $\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$.

3.96

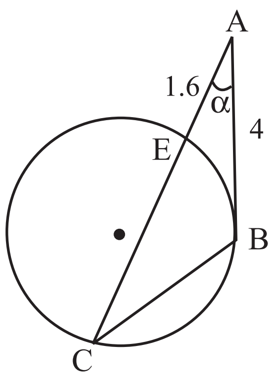


בגזרה ABC שרדיוסה R $(AB = BC = R)$ חסום מעגל שמרכזו O ורדיוסו r. נתון כי $\frac{r}{R} = \frac{5}{16}$.

הבע את שטח הגזרה באמצעות r.

<u>תשובה:</u> $4.84r^2$.

3.97



מנקודה A הנמצאת מחוץ למעגל העבירו ישר המשיק למעגל בנקודה B וישר שני החותך את המעגל בנקודות E ו- C.

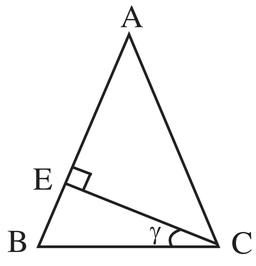
נתון: $AB = 4$ ס"מ, $AE = 1.6$ ס"מ, $\sphericalangle A = \alpha$.

א. הבע את $\sin\sphericalangle C$ באמצעות α.

ב. הבע את רדיוס המעגל באמצעות α.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{2\cdot\sin\alpha}{\sqrt{29-20\cos\alpha}}$. ב. $\frac{29-20\cos\alpha}{5\sin\alpha}$.

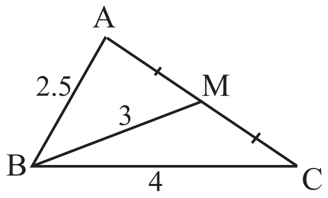
3.98



במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ מקודקוד C העבירו גובה CE לשוק AB. נתון כי $\sphericalangle BCE=\gamma$.
הבע באמצעות γ את היחס בין רדיוס המעגל החסום ב- $\triangle ABC$ לבין רדיוס המעגל החוסם את $\triangle ABC$.

<u>תשובה:</u> $\sin 2\gamma\cdot\tan\left(45^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)$.

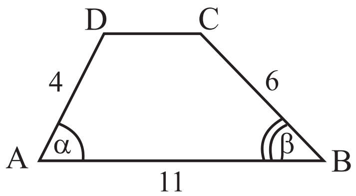
3.99



במשולש ABC, BM הוא התיכון לצלע AC.
נתון: $AB = 2.5$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ, $BM = 3$ ס"מ.
חשב את זוויות המשולש ABC.

<u>תשובה:</u> 94.59°, 46.57°, 38.84°.

3.100

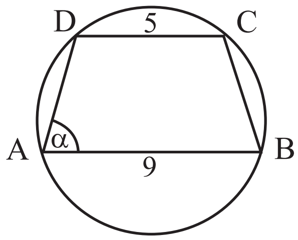


בטרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD,\quad AB > CD)$
נתון: $AB = 11$ ס"מ, $AD = 4$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ,
$\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

א. הבע את הבסיס CD באמצעות α ו- β.
ב. חשב את זוויות הטרפז עבור $CD = 3$ ס"מ.

<u>תשובה:</u> א. $11-2\sqrt{13+12\cos(\alpha+\beta)}$. ב. 46.57°, 28.96°, 151.04°, 133.43°.

3.101

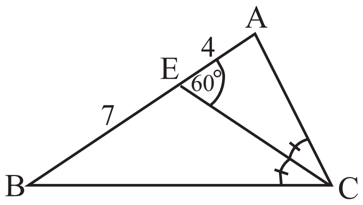


טרפז $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ חסום במעגל.
נתון: $AB = 9$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ, $\sphericalangle A=\alpha$.

א. הבע את רדיוס R של המעגל באמצעות α.
ב. חשב את הזווית α, כאשר $R = \frac{\sqrt{106}}{2}$ ס"מ.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{\sqrt{49+4\tan^2\alpha}}{2\sin\alpha}$ ב. 45° או 74.05°.

3.102



CE הוא חוצה הזווית ACB במשולש ABC.

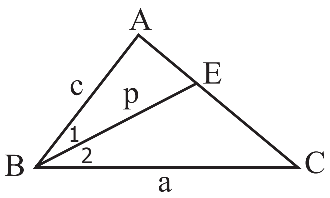
נתון: $AE=4$ ס"מ, $BE=7$ ס"מ, $\sphericalangle AEC=60°$.

א. חשב את אורכו של CE.

ב. חשב את גודל הזווית ACB.

<u>תשובה:</u> א. $9\frac{1}{3}$ ס"מ. ב. $48.93°$.

3.103



במשולש ABC, BE הוא חוצה הזווית ABC ($\sphericalangle B_1=\sphericalangle B_2$).

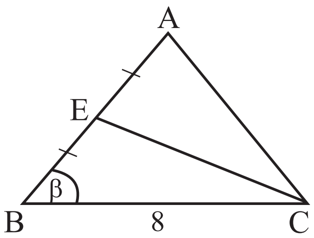
נתון: $BC=a$, $AB=c$, $BE=p$.

א. הבע את $\cos\sphericalangle B_1$ באמצעות a, c ו- p.

ב. חשב את שטחו של המשולש ABC, כאשר $a=8$ ס"מ, $c=5.5$ ס"מ, $p=6$ ס"מ.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{p(c+a)}{2ac}$. ב. 15.83 סמ"ר.

3.104



במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB=AC$)

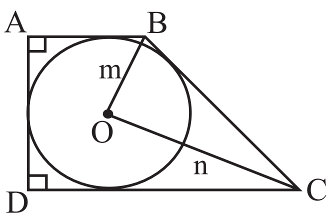
נתון: $BC=8$ ס"מ, $\sphericalangle B=\beta$. מקודקוד C של המשולש העבירו תיכון CE לצלע AB.

א. הראה כי: $CE=2\sqrt{9+\tan^2\beta}$.

ב. חשב את זוויות המשולש ABC, עבור $CE=2\sqrt{11}$ ס"מ.

<u>תשובה:</u> ב. $54.74°,\ 54.74°,\ 70.52°$.

3.105



בטרפז ישר-זווית ABCD ($AB\,||\,CD$, $AB<CD$, $\sphericalangle A=\sphericalangle D=90°$)

חסום מעגל שמרכזו O. חיברו את O עם הקודקודים B ו- C.

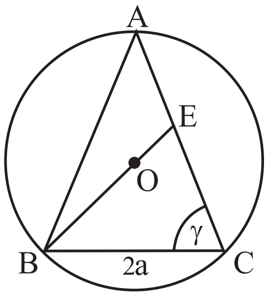
נתון: $OB=m$, $OC=n$.

א. הוכח כי: $\sin\sphericalangle BCD=\frac{2mn}{m^2+n^2}$

ב. הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות m ו- n.

<u>תשובה:</u> ב. $\frac{2\sqrt{m^2+n^2}\cdot(m+n)^2}{m^2+n^2}$.

3.106



ABC הוא משולש חד-זווית ושווה-שוקיים $(AB = AC)$.
המשולש חסום במעגל שמרכזו O. מקודקוד B דרך מרכז המעגל O מעבירים ישר החותך את השוק AC בנקודה E.
נתון: $\sphericalangle C = \gamma$, $BC = 2a$.

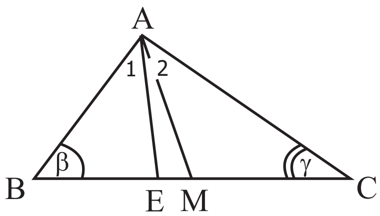
א. הבע את שטח המשולש AOE באמצעות a ו- γ.

ב. הוכח כי: $\frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{1}{4\sin^2\gamma}$.

ג. מצא את הזווית γ אם ידוע כי $S_{\triangle ABE} = 2.5 \cdot S_{\triangle AOE}$.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{a^2}{-4\sin\gamma \cdot \cos 3\gamma}$ ג. $52.24°$.

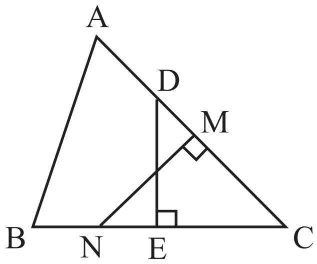
3.107



במשולש ABC נתון: $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$, AM תיכון לצלע BC, AE חוצה את הזווית BAC $(\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2)$.

הוכח: $\frac{BE}{MC} = \frac{2\sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}$

3.108



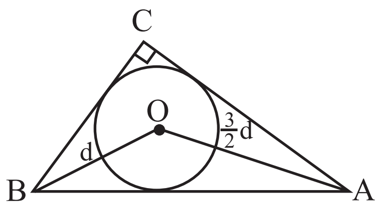
במשולש ABC הנקודה E היא אמצע של BC, ונקודה M היא אמצע של AC. אנך אמצעי לצלע BC חותך את AC בנקודה D, ואנך אמצעי לצלע AC חותך את BC בנקודה N.

נתון: $AC = b$, $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{NC} = \frac{2}{5}$

הבע את אורכי הצלעות BC ו- AB באמצעות b.

<u>תשובה:</u> $BC = \frac{b\sqrt{210}}{10}$, $AB = \frac{2b\sqrt{30}}{15}$.

3.109



בתוך משולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90°)$
חסום מעגל שמרכזו O. נתון $OB = d$, $OA = \frac{3}{2}d$.

א. מצא את הזוויות החדות של המשולש ABC.

ב. הבע את אורכי הצלעות של המשולש באמצעות d.

<u>תשובה:</u> א. $35.52°$, $54.48°$. ב. $2.32d$, $1.89d$, $1.35d$.

פרק 4: בעיות טריגונומטריות במרחב

זוויות במרחב

זווית בין ישר למישור

הגדרה ישר h מאונך למישור ω, אם הוא מאונך לכל ישר הנמצא במישור ω.

כדי לקבוע אם ישר ניצב למישור ניעזר במשפט הבא:

משפט אם ישר h מאונך לשני ישרים שונים במישור ω העוברים דרך נקודת החיתוך של הישר עם המישור, אזי הישר h מאונך למישור ω כולו (כלומר, הישר h מאונך לכל ישר הנמצא במישור ω).

הערה אם הישר h מאונך למישור ω והישר h′ מקביל ל-h, אזי גם הישר h′ מאונך למישור ω.

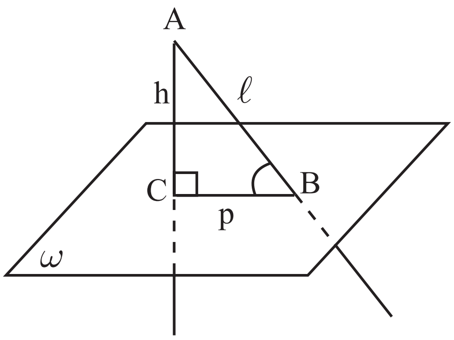
הגדרה ישר ℓ החותך את מישור ω ואיננו ניצב לו נקרא **משופע** למישור.

משופע ℓ חותך את המישור ω בנקודה B.

מנקודה A (נקודה כלשהי על המשופע)

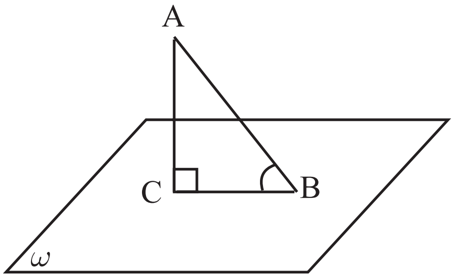
נוריד אנך h החותך את המישור בנקודה C.

ישר p העובר דרך הנקודות B ו-C נקרא היטל המשופע על המישור.



הגדרה הזווית החדה שבין ישר משופע למישור לבין היטלו של הישר על המישור, נקראת זווית בין ישר למישור.

בציור הנ"ל, הזווית בין ישר ℓ למישור ω היא הזווית ABC.



דוגמה

הישר AC מאונך למישור ω (ראה ציור)

נתון: $AC=4$ ס"מ, $AB=5.6$ ס"מ.

חשב את הזווית בין משופע AB למישור ω.

פתרון:

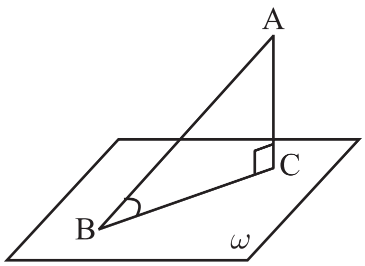
היטלו של משופע AB על המישור ω הוא הישר BC

ולכן הזווית בין הישר AB למישור ω היא הזווית ABC.

$\triangle ABC:\quad \sphericalangle C=90^\circ,\ AC=4$ ס"מ, $AB=5.6$ ס"מ;

$$\sin\sphericalangle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5.6}\quad\Rightarrow\quad \sin\sphericalangle ABC=\sin 45.58^\circ$$

$$(0^\circ<\sphericalangle ABC<90^\circ)\quad\Rightarrow\quad \sphericalangle ABC=45.58^\circ$$



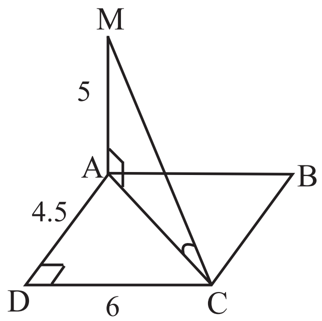
4.01

הישר AC ניצב למישור ω.

נתון: $AB=4.5$ ס"מ, $BC=3$ ס"מ.

חשב את הזווית בין המשופע AB למישור ω.

<u>תשובה:</u> 48.19°.



4.02

ABCD הוא מלבן שצלעותיו הן: $AD=4.5$ ס"מ, $CD=6$ ס"מ.

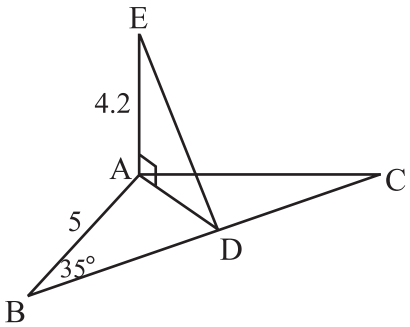
מנקודה A העלו אנך AM למישור המלבן וחיברו

את M עם קודקוד C (ראה ציור). נתון: $AM=5$ ס"מ.

חשב את אורך האלכסון AC ואת הזווית שבין

MC למישור המלבן ABCD.

<u>תשובה:</u> 7.5 ס"מ, 33.69°.



4.03

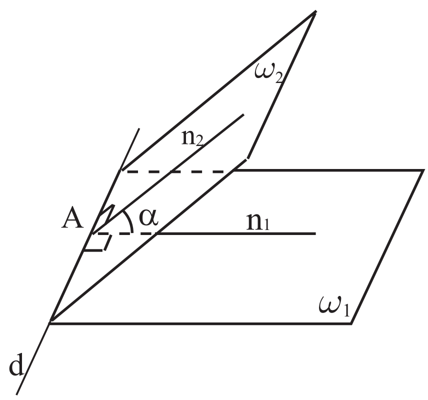
ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB=AC) שבו AD תיכון לבסיס BC. מקודקוד A העלו אנך AE למישור המשולש וחיברו את הנקודה E עם הנקודה D (ראה ציור).

נתון: $AE=4.2$ ס"מ , $AB=5$ ס"מ, $\sphericalangle B=35°$.

חשב את הזווית בין הישר ED למישור המשולש ABC.

<u>תשובה:</u> $55.65°$.

זווית בין שני מישורים



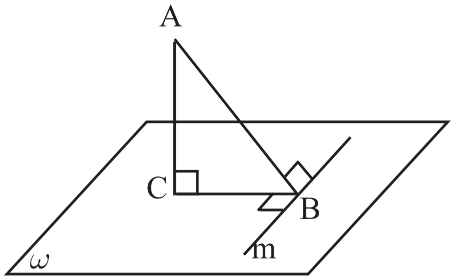
אם לשני מישורים יש נקודה משותפת, אזי יש להם ישר חיתוך משותף. למישורים ω_1 ו- ω_2 ישר חיתוך משותף d. מנקודה A (נקודה כלשהי על ישר d) נעלה שני אנכים: n_1 מאונך ל- d במישור ω_1 ו- n_2 מאונך ל- d במישור ω_2. הזווית החדה α הכלואה בין n_1 לבין n_2 היא הזווית בין המישורים ω_1 ו- ω_2 (ראה ציור).

הגדרה	**זווית בין שני מישורים** היא הזווית הכלואה בין שני האנכים לישר החיתוך המשותף. האנכים יוצאים מנקודה כלשהי על ישר החיתוך ונמצאים במישורים שונים.

הערה אם הזווית בין שני מישורים היא זווית ישרה, אזי המישורים מאונכים זה לזה.

משפט	אם ישר מאונך למישור נתון, אזי כל מישור שבו נמצא ישר זה מאונך גם הוא למישור הנתון.

משפט שלושת האנכים



נתון: AC אנך למישור ω, AB משופע ו- BC הוא היטלו של AB על המישור. דרך נקודה B עובר ישר m הנמצא במישור (ראה ציור).

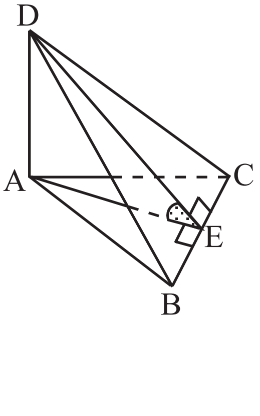
משפט	אם ישר עובר במישור דרך נקודת החיתוך של משופע עם המישור והוא מאונך להיטלו של המשופע על המישור, אזי הישר מאונך גם למשופע. (*אם הישר* m *מאונך ל-* BC*, אזי* m *מאונך ל-* AB).

משפט הפוך	אם ישר עובר במישור דרך נקודת חיתוך של משופע עם המישור והוא מאונך למשופע, אזי הישר מאונך גם להיטלו של המשופע על המישור. (*אם הישר* m *מאונך ל-* AB*, אזי* m *מאונך גם ל-* BC).

דוגמה

ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB=AC)$. מקודקוד A העלו אנך למישור המשולש ABC וחיברו את D עם B ועם C. נתון: $AB=4.8$ ס"מ, $AD=3$ ס"מ, $\sphericalangle BAC=36^\circ$.
חשב את הזווית שבין מישור המשולש BDC למישור המשולש ABC.

פתרון:



המישורים BDC ו- ABC נחתכים על-ידי הישר BC.
בניית עזר: במשולש ABC נעביר AE מאונך ל- BC.
במישור BDC נחבר את E עם הנקודה D.
ידוע כי AD מאונך למישור ABC. על-פי בניית עזר,
$AE\perp BC$ לכן $DE\perp BC$ (*משפט שלושת האנכים: אם הישר מאונך להיטלו של המשופע, אזי הוא מאונך גם למשופע*).
מעצם העובדה ש- $DE\perp BC$ וגם- $AE\perp BC$ נובע כי
$\sphericalangle AED$ היא הזווית בין המישורים BDC ו- ABC.

<u>שים לב:</u> *אפשר להראות ש- $DE \perp BC$ מבלי להיעזר במשפט שלושת האנכים. לשם כך, צריך להוכיח כי המשולש DBC הוא משולש שווה-שוקיים (על-ידי חפיפת המשולשים ABD ו- ACD) ולהיעזר במשפט האומר שבמשולש שווה-שוקיים התיכון לבסיס מתלכד עם הגובה לבסיס ועם חוצה זווית הראש.*

נחשב את AE.

$\triangle ABE: \quad \sphericalangle AEB = 90°, \ \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\cdot 36° = 18°, \ \ AB = 4.8$ ס"מ ;

$$\cos\sphericalangle BAE = \frac{AE}{AB} \quad \Rightarrow \quad AE = AB\cdot\cos\sphericalangle BAE = 4.8\cdot\cos 18° \quad \Rightarrow \quad AE = 4.565$$ ס"מ

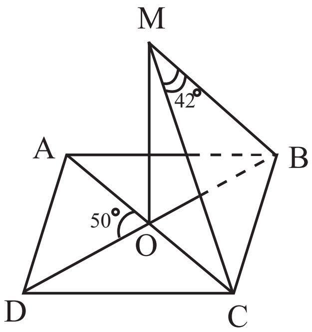
נמצא את הזווית AED.

$\triangle ADE: \quad \sphericalangle DAE = 90°, \ AD = 3$ ס"מ , $AE = 4.565$ ס"מ ;

$$\tan\sphericalangle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{3}{4.565} \quad \Rightarrow \quad \tan\sphericalangle AED = \tan 33.31°$$

$$(0° < \sphericalangle AED < 90°) \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle AED = 33.31°$$

4.04



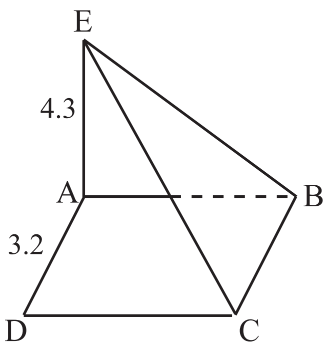
המרובע ABCD הוא מלבן. מנקודה O, שהיא מפגש האלכסונים, העלו אנך OM למישור המלבן וחיברו את M עם B ו-C (ראה ציור).

נתון: $AC = 4$ ס"מ, $\sphericalangle AOD = 50°$, $\sphericalangle BMC = 42°$.

חשב את הזווית שבין מישור המשולש BMC למישור המלבן ABCD.

<u>תשובה:</u> $35.01°$.

4.05



מקודקוד A של מקבילית ABCD העלו אנך AE למישור המקבילית וחיברו את E עם הקודקודים B ו- C (ראה ציור).

נתון: $AD = 3.2$ ס"מ, $AE = 4.3$ ס"מ, $S_{ABCD} = 16$ סמ"ר.

חשב את הזווית שבין מישור המשולש EBC למישור המקבילית ABCD.

<u>תשובה:</u> $40.7°$.

מנסרה

הגדרה **פאון** – חלק המרחב החסום על-ידי מצולעים מישוריים הנקראים פאות.

הגדרה **מנסרה** – פאון בו שתי פאות הן מצולעים חופפים, הנמצאים במישורים מקבילים, הנקראים בסיסים, ושאר הפאות הן מקביליות.

* **פאות המנסרה** – המקביליות הצדדיות.
* **מקצועות צדדיים** – ישרי החיתוך של הפאות.
* **מקצועות הבסיס** – צלעות הבסיסים.
* **אלכסון המנסרה** – קטע המחבר שני קודקודים שאינם נמצאים על אותה פאה.

הגדרה **מנסרה ישרה** – מנסרה שבה מקצועות צדדיים מאונכים לבסיסים.

הגדרה **מנסרה משוכללת** – מנסרה ישרה שבסיסיה הם מצולעים משוכללים.

הגדרה **שטח המעטפת** – סכום שטחים של פאות צדדיות.

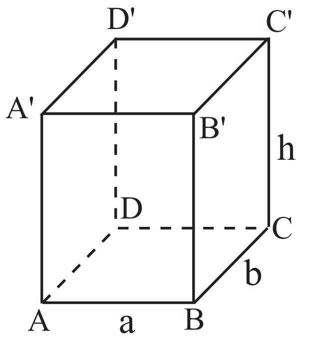
הגדרה **שטח הפנים** – סכום שטח המעטפת ושטח שני בסיסי המנסרה.

הגדרה **נפח המנסרה** – מכפלתם של שטח הבסיס בגובה המנסרה.

תיבה

הגדרה	**תיבה** – מנסרה ישרה שבסיסיה הם מלבנים.

* **תיבה ריבועית** – תיבה שבסיסה הוא ריבוע.
* **קובייה** – תיבה שכל מקצועותיה שווים.

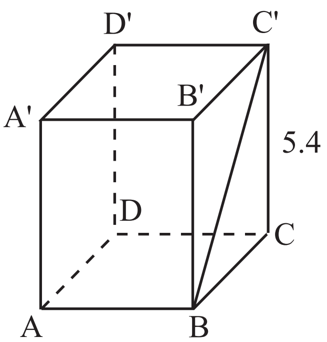


שטח המעטפת: $\boxed{M=2(a+b)\cdot h}$

שטח הפנים: $\boxed{P=2(a+b)\cdot h+2ab}$

הנפח: $\boxed{V=a\cdot b\cdot h}$

4.06



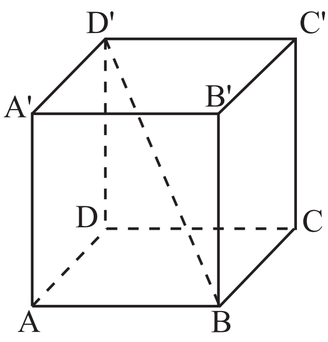
בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. אלכסון הפאה הצדדית יוצר זווית בת $68°$ עם בסיס התיבה.

גובה התיבה הוא 5.4 ס"מ .

חשב את שטח המעטפת של התיבה ואת נפחה.

<u>תשובה:</u> 47.09 סמ"ר, 25.66 סמ"ק.

4.07



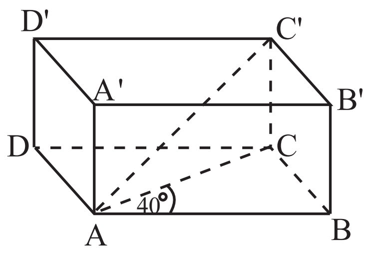
נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$.

א. חשב את הזווית שבין אלכסון הקובייה BD' לבסיס $ABCD$.

ב. נתון: $BD'=2\sqrt{3}$ ס"מ. חשב את שטח הפנים של הקובייה.

<u>תשובה:</u> א. $35.26°$. ב. 24 סמ"ר.

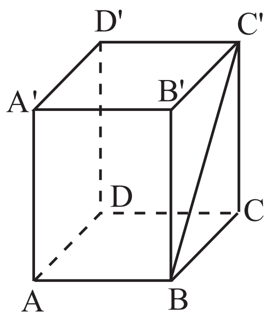
4.08



בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ אלכסון הבסיס שאורכו 8 ס"מ יוצר זווית בת $40°$ עם מקצוע הבסיס.

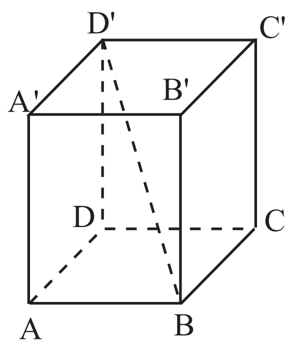
אורך אלכסון התיבה הוא 10 ס"מ.
חשב את שטח הפנים של התיבה ואת נפחה.
<u>תשובה:</u> 198.26סמ"ר, 189.05סמ"ק.

4.09



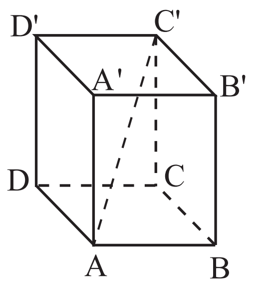
בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה הוא ריבוע,
אלכסון BC' של הפאה הצדדית $BB'C'C$
יוצר זווית בת $30°$ עם הפאה $AA'B'B$.
נתון: $BC'=d$. הבע את שטח המעטפת של התיבה באמצעות d.
<u>תשובה:</u> $d^2\sqrt{3}$.

4.10



בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע,
אלכסון BD' שאורכו 8ס"מ יוצר זווית α
$(0°<\alpha<45°)$ עם הפאה הצדדית $AA'D'D$.
הבע את נפח התיבה באמצעות α.
<u>תשובה:</u> $V=512\sin^2\alpha\cdot\sqrt{\cos 2\alpha}$.

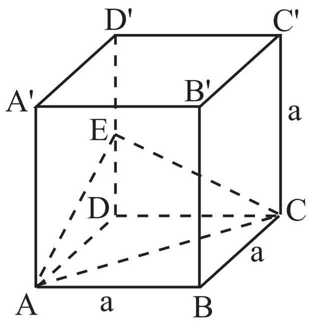
4.11



בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ אלכסון AC' שאורכו 10.3ס"מ יוצר זווית בת $25°$ עם פאה $AA'B'B$ וזווית בת $38°$ עם פאה $AA'D'D$.
חשב את שטח הפנים של התיבה.
<u>תשובה:</u> $P=$201.4 סמ"ר.

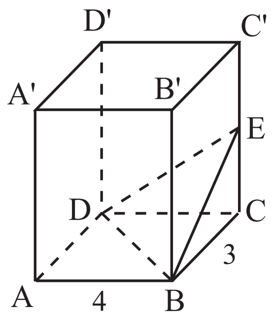
4.12

נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ שצלע שלה a.
E היא נקודה על המקצוע $D'D$.
חיברו את E עם הקודקודים A ו- C.
שטח המשולש AEC הוא $\frac{a^2\sqrt{34}}{8}$.
חשב את הזווית שבין המישור AEC למישור הבסיס $ABCD$.
תשובה: $46.69°$.



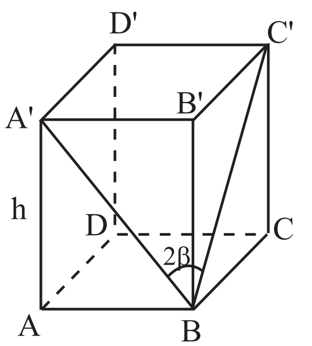
4.13

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שצלעות הבסיס
שלה הן: $AB = 4$ ס"מ, $BC = 3$ ס"מ.
הנקודה E היא אמצע במקצוע CC'. חיברו את E
עם הקדקודים B ו- D. המישור BED יוצר זווית
בת $55°$ עם מישור הבסיס $ABCD$.
חשב את נפח התיבה.
תשובה: 82.32 סמ"ק.



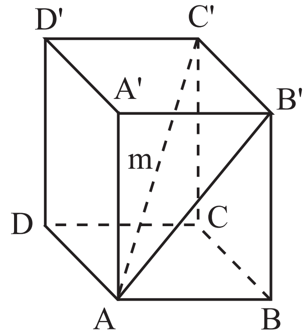
4.14

נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה
$ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h.
הזווית שבין האלכסונים של שתי פאות
סמוכות היוצאים מקודקוד B היא 2β
$(0°<\beta<45°)$ (ראה ציור).
הבע את שטח המעטפת של התיבה באמצעות h ו- β.
תשובה: $\frac{4\sqrt{2}\cdot h^2\cdot\sin\beta}{\sqrt{\cos 2\beta}}$.

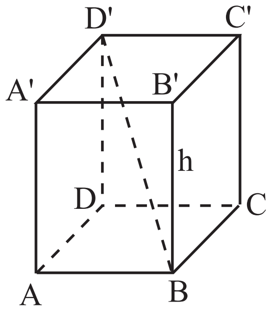


4.15

בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ האלכסון AC' יוצר
זווית α עם הפאה $AA'B'B$ ואלכסון AB'
של הפאה $AA'B'B$ יוצר זווית β עם הפאה $BB'C'C$.
אורך האלכסון AC' הוא m.
הבע את נפח התיבה באמצעות α, β ו-m.
תשובה: $\frac{m^3}{4}\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos\alpha$.

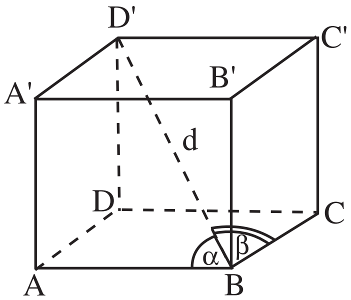


4.16



נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה ריבוע $ABCD$.
נתון: $BB'=h$. הזווית בין אלכסון BD'
ופאה $CC'D'D$ היא γ $(0°<\gamma<45°)$.
הוכח כי נפח התיבה הוא $\frac{h^3\sin^2\gamma}{\cos 2\gamma}$.

4.17

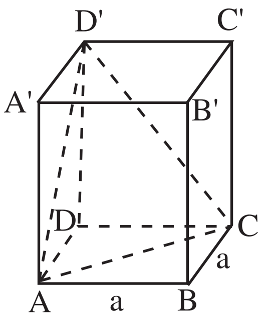


בתיבה $ABCDA'B'C'D'$, שבסיסה מלבן $ABCD$,
האלכסון BD' יוצר זווית α עם מקצוע AB,
זווית β עם מקצוע BC וזווית γ עם מישור
הבסיס. אורכו של BD' שווה ל- d.

א. הבע את נפח התיבה באמצעות α, β, γ ו- d.
ב. הוכח כי $\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$. חשב את זווית γ, כאשר $\alpha=55°$ ו- $\beta=70°$.

<u>תשובה</u>: א. $d^3\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$. ב. $48.09°$.

4.18

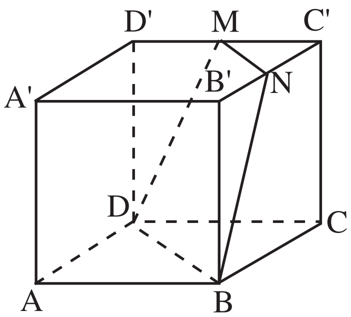


$ABCDA'B'C'D'$ מנסרה מרובעת ישרה ומשוכללת.
המישור $AD'C$ יוצר זווית γ עם מישור הבסיס $ABCD$.
מקצוע הבסיס שווה ל- a.

א. הבע את שטח המשולש $AD'C$ באמצעות a ו- γ.
ב. הבע את הנפח V של המנסרה באמצעות a ו- γ
ומצא את גודלה של זווית γ כאשר $a=3$ ס"מ ו- $V=54$ סמ"ק.

<u>תשובה</u>: א. $\frac{a^2}{2\cos\gamma}$ ב. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\tan\gamma$; $\gamma=70.53°$.

4.19*

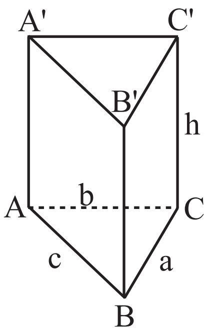


בקובייה $ABCDA'B'C'D'$, שאורך מקצוע שלה הוא a,
הנקודה M היא אמצע המקצוע $D'C'$ ונקודה N היא
אמצע המקצוע $B'C'$. דרך האלכסון BD של הבסיס
התחתון ודרך הנקודות M ו- N העבירו מישור $BDMN$,
היוצר זווית γ $(0°<\gamma<90°)$ עם מישור הבסיס $ABCD$.

א. חשב את זווית γ.
ב. חשב את אורך המקצוע a של הקובייה, אם ידוע ששטח המרובע $BDMN$ שווה ל- 28 סמ"ר.

<u>תשובה</u>: א. $70.53°$. ב. 5 ס"מ.

מנסרה ישרה משולשת

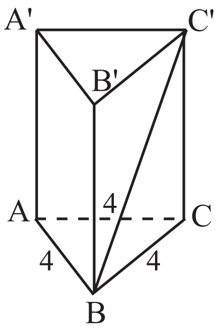


מנסרה ישרה משולשת – מנסרה ישרה שבסיסה משולש.

שטח המעטפת: $\boxed{\mathbf{M = (a+b+c)\cdot h}}$

שטח הפנים: $\boxed{\mathbf{P = M + 2S_{\triangle ABC}}}$

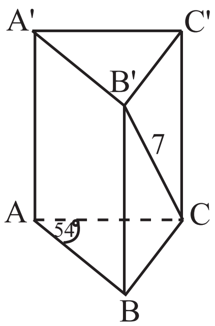
הנפח: $\boxed{\mathbf{V = S_{\triangle ABC}\cdot h}}$



4.20

נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$, שבסיסיה הם משולשים שווי-צלעות. אורך צלע המשולש הוא 4 ס"מ.
האלכסון BC' בפאה צדדית $BB'C'C$ יוצר זווית בת $70°$ עם הבסיס ABC.
חשב את שטח הפנים של המנסרה.

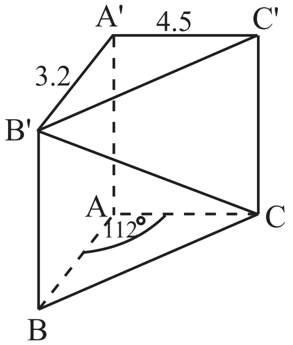
<u>תשובה:</u> 145.74 סמ"ר.



4.21

הבסיס של מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ הוא משולש שווה-שוקיים שבו $AB = AC$ ו- $\sphericalangle BAC = 54°$.
האלכסון $B'C$ בפאה הצדדית $BB'C'C$ שאורכו 7 ס"מ יוצר זווית בת $65°$ עם מישור הבסיס ABC.
חשב את נפח המנסרה.

<u>תשובה:</u> 27.26 סמ"ק.



4.22

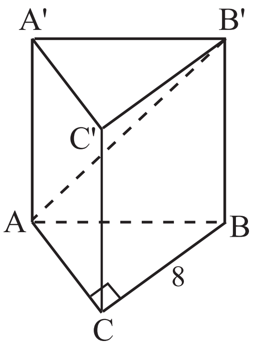
במנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$ צלעות הבסיס הן: $AB = 3.2$ ס"מ, $AC = 4.5$ ס"מ והזווית ביניהן $\sphericalangle BAC = 112°$. אלכסון $B'C$ בפאה $BB'C'C$ יוצר זווית בת $43°$ עם מישור הבסיס.
חשב את נפח המנסרה.

<u>תשובה:</u> 40.01 סמ"ק.

4.23

נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש ישר-זווית שבו $\measuredangle ACB=90^\circ$ ו- $BC=8$ ס"מ.
הזווית בין מישור הפאה $AA'B'B$ למישור הפאה $AA'C'C$ היא בת 50°, הזווית בין האלכסון AB' למישור הפאה $BB'C'C$ היא בת 32°.
חשב את גובה המנסרה.

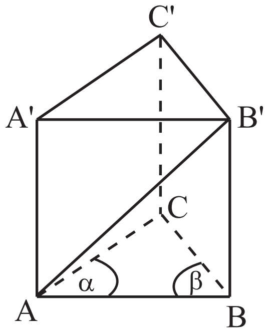
<u>תשובה:</u> 7.17 ס"מ.



4.24

נתונה מנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R,
$\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle ABC=\beta$ $(0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ)$.
האלכסון AB' בפאה הצדדית $AA'B'B$ שווה ל- $2R$.
הבע את שטח המעטפת של המנסרה באמצעות α, β ו- R.

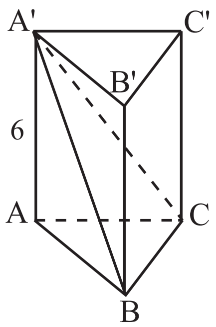
<u>תשובה:</u> $4R^2\left[\sin\beta+\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)\right]\cdot\cos(\alpha+\beta)$.



4.25

במנסרה ישרה משולשת ומשוכללת $ABCA'B'C'$ דרך מקצוע הבסיס BC ודרך קודקוד A' העבירו מישור $A'BC$, היוצר זווית בת 62° עם מישור הבסיס ABC.
גובה המנסרה הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

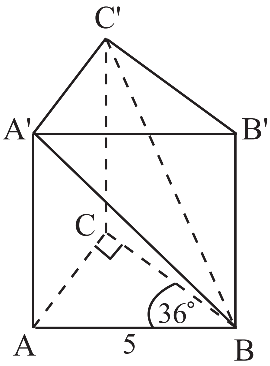
<u>תשובה:</u> 66.24 ס"מ.



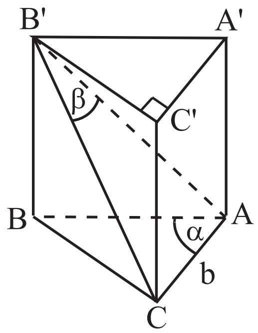
4.26*

במנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש ישר-זווית, נתון: $\measuredangle ACB=90^\circ$,
$AB=5$ ס"מ, $\measuredangle ABC=36^\circ$. דרך המקצוע $A'C'$ ודרך קודקוד B העבירו מישור $A'C'B$ היוצר זווית בת 48° עם מישור הבסיס $A'B'C'$.
חשב את שטח המשולש $A'C'B$.

<u>תשובה:</u> 8.89 סמ"ר.



4.27*



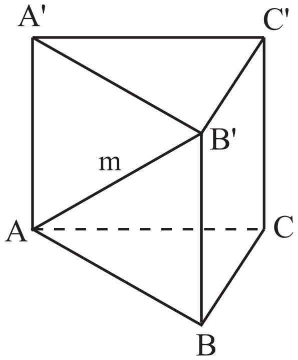
במנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש ישר-זווית ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$) נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AC = b$, הזווית שבין האלכסון $B'A$ לאלכסון $B'C$ היא β, הזווית שבין מישור המשולש $AB'C$ לבין מישור הבסיס היא γ.

א. הראה כי $\cos\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta$

ב. נתון: $b = 3$ ס"מ, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$. חשב את נפח המנסרה.

<u>תשובה:</u> ב. 19.09סמ"ק.

4.28*



במנסרה ישרה משולשת $ABCA'B'C'$, שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$), האלכסון AB' בפאה $AA'B'B$ שאורכו m, יוצר זווית α עם מישור הבסיס ויוצר זווית γ עם מישור הפאה $AA'C'C$.

הבע את נפח המנסרה באמצעות α, γ ו- m.

<u>תשובה:</u> $\frac{m^3}{4}\sin 2\alpha \sin\gamma$.

מנסרה ישרה שבסיסה מצולע כלשהו

שטח המעטפת: $\boxed{\mathbf{M = L_B \cdot h}}$

(L_B - היקף הבסיס, h - הגובה)

שטח הפנים: $\boxed{\mathbf{P = M + 2S_B}}$

(S_B - שטח הבסיס, M - שטח המעטפת)

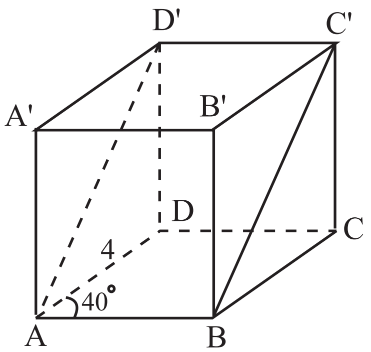
הנפח: $\boxed{\mathbf{V = S_B \cdot h}}$

(S_B - שטח הבסיס, h - הגובה)

4.29

במנסרה ישרה מרובעת $ABCDA'B'C'D'$
שבסיסה מקבילית $ABCD$, דרך הקודקודים
A, B, C', D' העבירו מישור היוצר זווית בת $67°$ עם
מישור הבסיס. נתון: $AD =$ 4 ס"מ, $\measuredangle BAD = 40°$,
שטח המרובע $ABC'D'$ הוא 28 סמ"ר.
חשב את נפח המנסרה.

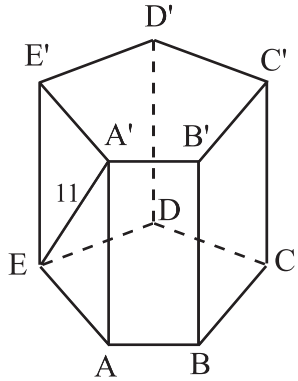
<u>תשובה:</u> 66.25 סמ"ק.



4.30

במנסרה ישרה משוכללת $ABCDEA'B'C'D'E'$
שבסיסה מחומש, האלכסון $A'E$ בפאה הצדדית
$AA'E'E$ שאורכו 11 ס"מ יוצר זווית בת $48°$ עם
מישור הבסיס העליון $A'B'C'D'E'$.
חשב את שטח הפנים של המנסרה.

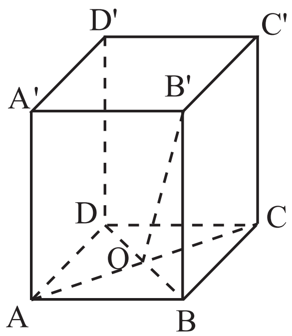
<u>תשובה:</u> 487.26 סמ"ר.



4.31

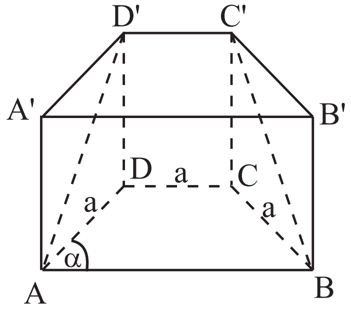
נתונה מנסרה ישרה מרובעת $ABCDA'B'C'D'$
שבסיסה מעוין $ABCD$. אלכסוני המעוין נחתכים
בנקודה O. הישר $B'O$ יוצר זווית β עם מישור הבסיס.
נתון: $\measuredangle BAD = \alpha$, $AC = m$.
הבע את שטח המעטפת של המנסרה באמצעות α, β ו-m.

<u>תשובה:</u> $\dfrac{m^2 \tan\frac{\alpha}{2} \tan\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.



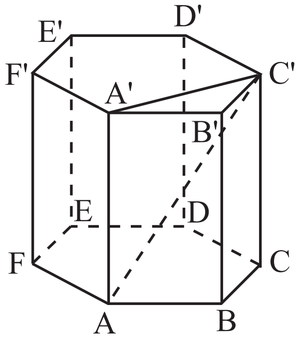
4.32

במנסרה ישרה מרובעת $ABCDA'B'C'D'$
שבסיסה טרפז שווה-שוקיים $ABCD$
($AB > CD$, $AB \| CD$), העבירו מישור דרך מקצוע
AB בבסיס התחתון ודרך מקצוע $C'D'$ בבסיס
העליון. המישור יוצר זווית γ עם מישור הבסיס
$ABCD$. נתון: $AD = BC = CD = a$, $\measuredangle BAD = \alpha$.
הבע את שטח המרובע $ABC'D'$ באמצעות a, α ו-γ.



<u>תשובה:</u> $\frac{a^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{\cos\gamma}$.

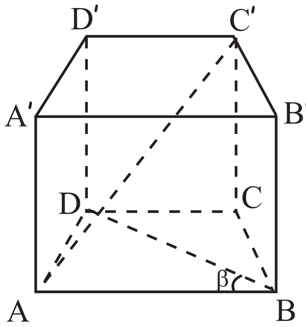
4.33^*



במנסרה ישרה $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$
שבסיסה משושה משוכלל, האלכסון AC'
יוצר זווית α עם הפאה הצדדית $AA'F'F$.
רדיוס המעגל החוסם את המשושה הוא R.
הבע את נפח המנסרה באמצעות α ו- R.

<u>תשובה:</u> $\frac{9R^3}{2\tan\alpha}$.

4.34^*



במנסרה מרובעת וישרה $ABCDA'B'C'D'$, שבסיסה טרפז
שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, האלכסון BD
של הבסיס שווה ל- d ויוצר זווית β עם צלע AB של הבסיס.

א. הוכח כי $S_{ABCD} = \frac{d^2\cdot\sin 2\beta}{2}$.

ב. נתון: האלכסון AC' של המנסרה יוצר זווית α עם בסיסה.
הבע את נפח המנסרה באמצעות α, β ו- d.

<u>תשובה:</u> ב. $\frac{d^3\sin 2\beta\tan\alpha}{2}$.

פירמידה

הגדרה	**פירמידה** – פאון בו פאה אחת היא מצולע, הנקרא בסיס, ושאר הפאות הן משולשים הבנויים כל אחד על צלע אחת של הבסיס ונפגשים בנקודה אחת, הנמצאת מחוץ למישור הבסיס ונקראת קודקוד הפירמידה.

* **פאות הפירמידה** – המשולשים הצדדיים.
* **מקצועות צדדיים** – ישרי החיתוך של הפאות.
* **מקצועות הבסיס** – צלעותיו של מצולע הבסיס.
* **גובה הפירמידה** – אנך היורד מקודקוד הפירמידה למישור הבסיס.

הגדרה	**פירמידה ישרה** – פירמידה שבה הגובה פוגש את הבסיס במרכז המעגל החוסם את הבסיס.

* בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים שווים.
* בפירמידה ישרה כל הזוויות בין המקצועות הצדדיים לבסיס שוות.

הגדרה	**פירמידה משוכללת** – פירמידה ישרה שבה הבסיס הוא מצולע משוכלל.

הגדרה	**שטח המעטפת** – סכום שטחן של כל הפאות הצדדיות.

הגדרה	**שטח הפנים** – סכום שטחם של המעטפת והבסיס.

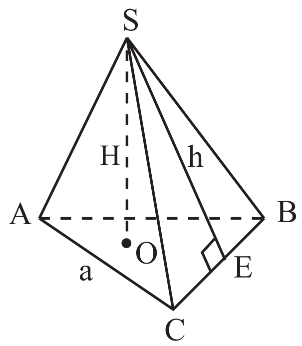
הגדרה	**נפח הפירמידה** – שליש ממכפלת שטח הבסיס בגובה.

נגדיר: M - שטח המעטפת, P - שטח הפנים, V - נפח.
S_B - שטח הבסיס, H - גובה הפירמידה.

שטח הפנים: $\boxed{P = M + S_B}$

הנפח: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot H}$

פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה–צלעות



שטח המעטפת: $\boxed{M = \frac{3}{2} a \cdot h}$

(a - צלע הבסיס, h – גובה הפאה הצדדית)

<u>שים לב:</u> *שטח משולש שווה-צלעות שצלעו* a *הוא:*

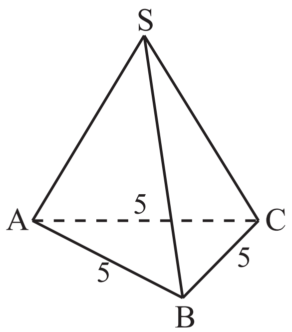
$$\boxed{S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \quad \Rightarrow \quad S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

שטח הפנים: $\boxed{P = \frac{3}{2} ah + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$

(a - צלע הבסיס, h - גובה הפאה הצדדית)

הנפח: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H \quad \Rightarrow \quad V = \frac{H \cdot a^2\sqrt{3}}{12}}$

(a - צלע הבסיס, H - גובה הפירמידה)



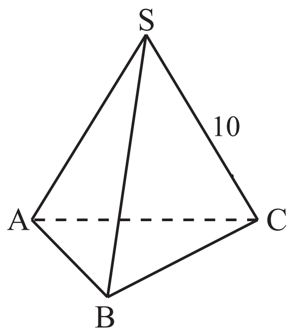
4.35

בפירמידה ישרה ומשולשת SABC, הבסיס ABC הוא משולש שווה-צלעות. אורך צלע המשולש הוא 5 ס"מ. הזווית בין הפאה הצדדית לבסיס היא בת 72°.

א. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

<u>תשובה:</u> א. 35.025 סמ"ר. ב. 45.85 סמ"ר.



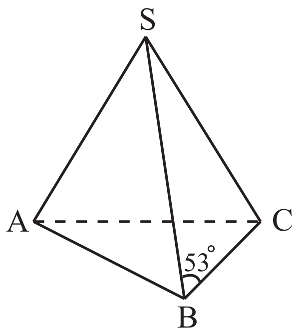
4.36

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש שווה-צלעות ABC, המקצוע הצדדי שאורכו 10 ס"מ יוצר זווית בת 65° עם בסיס הפירמידה.
חשב את נפח הפירמידה.

<u>תשובה:</u> 70.28 סמ"ק.

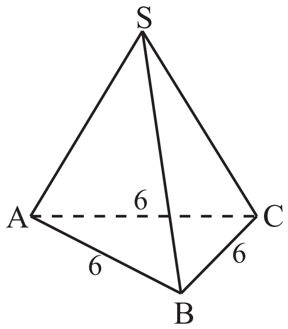
4.37

נתונה פירמידה SABC ישרה, משולשת ומשוכללת.
רדיוס המעגל החוסם את הבסיס הוא $R = 3$ ס"מ,
הזווית שבין המקצוע הצדדי לצלע הבסיס היא בת $53°$.
א. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
<u>תשובה:</u> א. 26.91 סמ"ר. ב. 3.11 ס"מ.



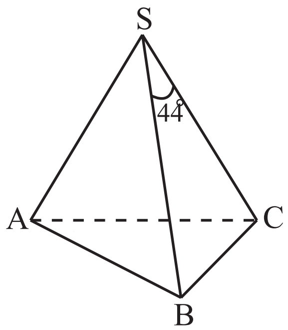
4.38

בפירמידה ישרה SABC הבסיס הוא משולש
שווה-צלעות ABC. אורך צלע המשולש הוא
6 ס"מ. נפח הפירמידה הוא 37 סמ"ק.
חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית
לבסיס הפירמידה.
<u>תשובה:</u> $76.34°$.



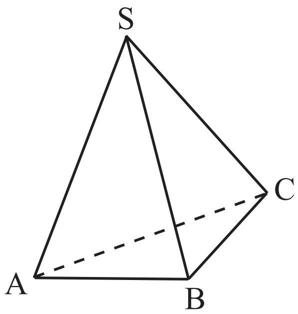
4.39

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש
שווה-צלעות ABC, הזווית בין שני
המקצועות הצדדיים היא בת $44°$.
שטח המעטפת של הפירמידה הוא 37.8 סמ"ר.
חשב את הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס הפירמידה.
<u>תשובה:</u> $64.32°$.



4.40

נתונה פירמידה ישרה משוכללת SABC שבה
המקצוע הצדדי שווה למקצוע הבסיס (טטראדר).
אורך צלע הבסיס הוא a.
א. חשב את הזווית בין הפאה הצדדית לבסיס הפירמידה.
ב. הבע את נפח הפירמידה באמצעות a.
<u>תשובה:</u> א. $70.53°$. ב. $0.12a^3$.

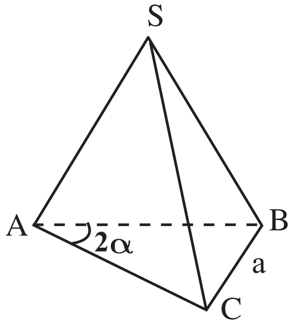


4.41*

SABC היא פירמידה ישרה ומשוכללת. גובה הפירמידה שווה למקצוע הבסיס .
א. חשב את הזווית בין המקצוע הצדדי למישור הבסיס.
ב. חשב את הזווית בין שתי הפאות הצדדיות של הפירמידה.
<u>תשובה:</u> א. $60°$. ב. $67.38°$.

פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה–שוקיים

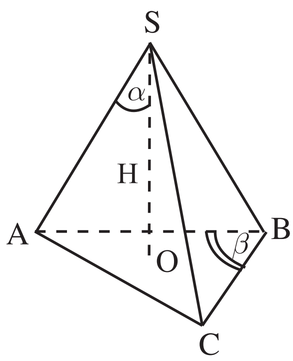
4.42



SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$. נתון: $BC = a$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לבין בסיס הפירמידה היא β. הבע את נפח הפירמידה באמצעות α , β ו- a .

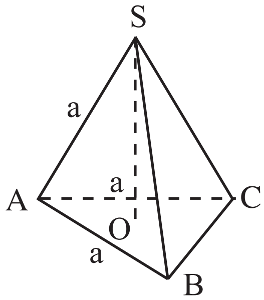
<u>תשובה:</u> $\frac{a^3 \tan\beta}{48\sin^2\alpha}$.

4.43



בפירמידה ישרה שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$ וגובה הפירמידה שאורכו H יוצר זווית α עם המקצוע הצדדי של הפירמידה.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות H , α ו- β.
<u>תשובה:</u> $\frac{2}{3}H^3 \tan^2\alpha \sin^2\beta \sin 2\beta$.

4.44



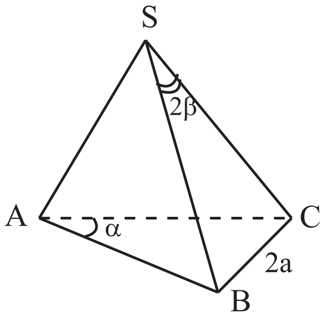
בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש ABC,
נתון: $SA = AB = AC = a$ והזווית בין הפאה SBC לבסיס הפירמידה היא 2β.
הבע את הגובה SO של הפירמידה באמצעות a ו- β.
<u>תשובה:</u> $a \cdot \cos\beta$.

4.45

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC (AB=AC),

נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BSC = 2\beta$, $BC = 2a$.

הוכח כי גובה הפירמידה שווה ל- $\frac{a\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}}{\tan\alpha \cdot \tan\beta}$.

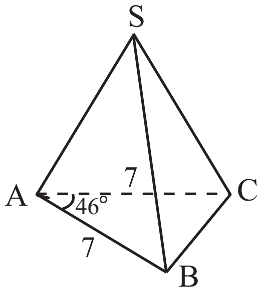


4.46*

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC, נתון: $AB = AC = 7$ ס"מ, $\sphericalangle BAC = 46°$ והפאה הצדדית SBC יוצרת זווית בת $75°$ עם מישור הבסיס.

חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

__תשובה:__ 97.68 סמ"ר.

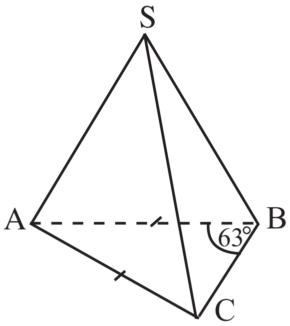


4.47*

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש שווה-שוקיים ABC (AB = AC), נתון: $\sphericalangle ABC = 63°$ והזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס שווה ל- $71°$.

חשב את הזווית בין הפאות הצדדיות SAB ו- SAC.

__תשובה:__ $56.78°$.



4.48*

בפירמידה משולשת וישרה SABC נתון כי:

$SA = SB = SC = AB = AC = m$, $BC = \frac{m\sqrt{3}}{3}$.

הזווית בין הפאה הצדדית SBC למישור הבסיס היא α,

והזווית בין הפאה הצדדית SAB לפאה צדדית SAC היא γ.

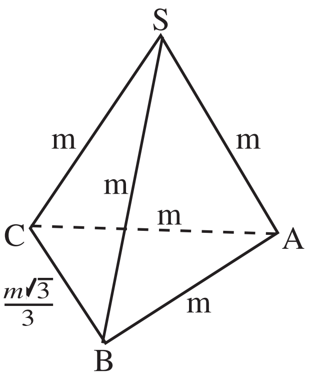
א. מצא את $\cos\alpha$.

ב. מצא את $\cos\gamma$.

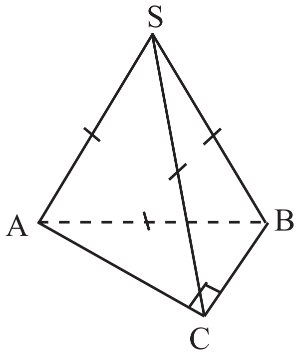
ג. על-פי התוצאות שקיבלת בסעיפים הקודמים,

הוכח ללא שימוש במחשבון, כי $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{61}{99}$.

__תשובה:__ א. $\cos\alpha = \frac{5}{11}$. ב. $\cos\gamma = \frac{7}{9}$.



פירמידה ישרה שבסיסה משולש ישר–זווית



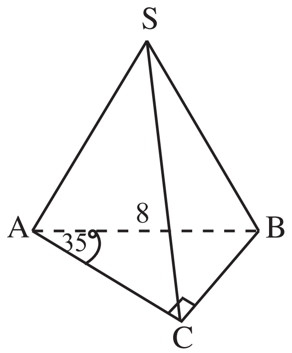
4.49

נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים ABC $(AC = BC)$.
אורך של כל אחד מהמקצועות הצדדיים של הפירמידה שווה לאורך היתר של הבסיס.

א. חשב את הזווית בין המקצוע SC למישור הבסיס של הפירמידה.

ב. נתון כי אורך היתר של הבסיס שווה ל- $6\sqrt{2}$ ס"מ. חשב את נפח הפירמידה.

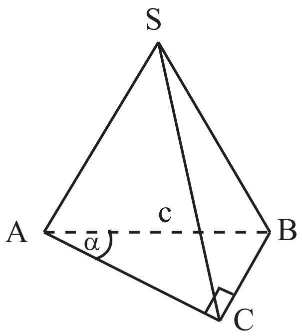
<u>תשובה:</u> א. $60°$. ב. 44.1 סמ"ק.



4.50

בפירמידה ישרה SABC שבסיסה משולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle ACB = 90°)$,
נתון: $\sphericalangle BAC = 35°$, $AB = 8$ ס"מ, הזווית בין הפאה הצדדית SBC לבסיס הפירמידה היא $67°$.
חשב את גובה הפירמידה.

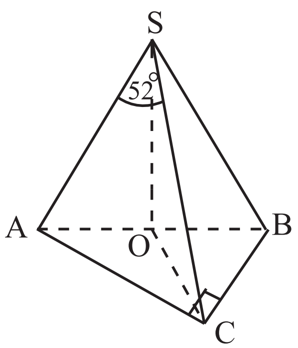
<u>תשובה:</u> 7.72 ס"מ.



4.51

בפירמידה ישרה SABC, שבסיסה $\triangle ABC$ הוא משולש ישר-זווית $(\sphericalangle ACB = 90°)$, נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $AB = c$,
והזווית בין המקצוע SC לבסיס הפירמידה היא β.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות α, β ו- c.

<u>תשובה:</u> $\frac{c^3}{24}\cdot\sin 2\alpha\tan\beta$.



4.52*

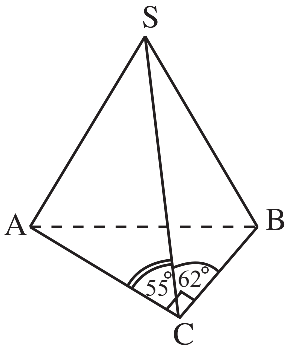
בסיסה של פירמידה ישרה SABC הוא משולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle ACB = 90°)$. דרך גובה הפירמידה SO ודרך קודקוד C העבירו מישור SOC היוצר זווית בת $50°$ עם הפאה הצדדית SAB. הזווית בין המקצוע הצדדי SA לבין המקצוע הצדדי SC שווה ל- $52°$.

א. חשב את הזווית שבין המקצועות הצדדיים SB ו- SC.

ב. חשב את הזווית בין המקצוע SA לבין מישור הבסיס.

<u>תשובה:</u> א. $23.65°$. ב. $60.99°$.

4.53^*



בפירמידה ישרה SABC, שבסיסה $\triangle ABC$

הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle ACB = 90°$),

נתון: $\measuredangle SCA = 55°$, $\measuredangle SCB = 62°$.

חשב את הזוויות שיוצרות הפאות

SAC ו- SBC בהתאמה עם מישור הבסיס.

<u>תשובה:</u> $55.04°$, $49.61°$.

4.54^*

בפירמידה משולשת וישרה SABC, שבסיסה $\triangle ABC$ הוא משולש ישר-זווית ($\measuredangle ACB = 90°$),
נתון: $\measuredangle ABC = \beta$, אורכו של התיכון ליתר AB הוא d, כל המקצועות הצדדיים של הפירמידה יוצרים זווית α עם הבסיס.

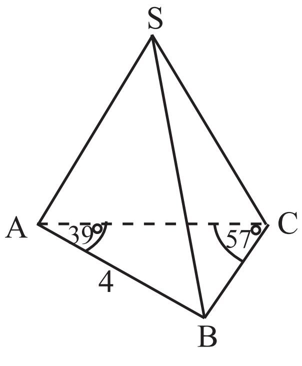
א. הבע את נפח הפירמידה באמצעות d, α ו- β.

ב. חשב את זווית α, אם ידוע ש: $\alpha = 2\beta$, $d = 5$ ס"מ, $V = 47.5$ סמ"ק.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{d^3}{3}\sin 2\beta \cdot \tan\alpha$. ב. $54.55°$.

פירמידה ישרה שבסיסה משולש שונה צלעות

4.55



בפירמידה SABC ישרה משולשת שבסיסה $\triangle ABC$,

נתון: $AB = 4$ ס"מ, $\measuredangle BAC = 39°$,

$\measuredangle ACB = 57°$ והזווית בין המקצוע הצדדי לבין

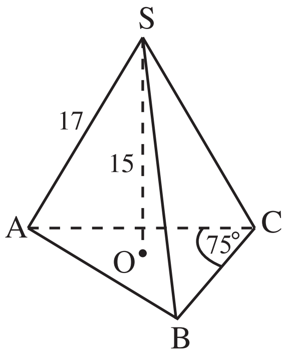
בסיס הפירמידה שווה ל- $66°$.

חשב את נפח הפירמידה.

<u>תשובה:</u> 10.65 סמ"ק.

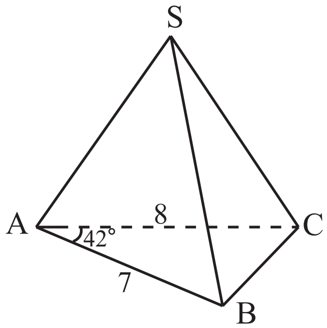
4.56

בפירמידה ישרה משולשת SABC שבסיסה $\triangle ABC$,
נתון: $\sphericalangle ACB = 75°$, $SA = 17$ ס"מ,
גובה הפירמידה שווה ל-15 ס"מ.
חשב את הזווית בין המקצוע הצדדי SA לבין המקצוע הצדדי SB.
<u>תשובה:</u> $54.06°$.



4.57

בפירמידה ישרה משולשת SABC שבסיסה $\triangle ABC$,
נתון: $AB = 7$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ, $\sphericalangle BAC = 42°$;
הפאה הצדדית SBC יוצרת זווית בת $68°$ עם מישור הבסיס.
חשב את הגובה של הפאה הצדדית SBC.
<u>תשובה:</u> 8.09 ס"מ.

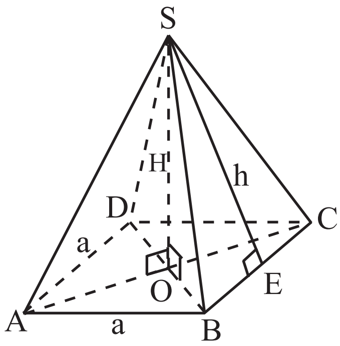


פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע

שטח המעטפת: $\boxed{M = 2ah}$
(a - צלע הבסיס, h - גובה הפאה הצדדית)

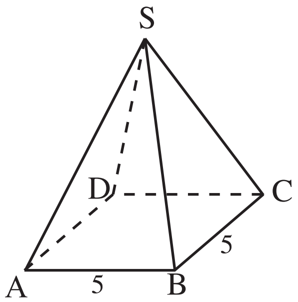
שטח הפנים: $\boxed{P = a^2 + 2ah}$
(a - צלע הבסיס, h - גובה הפאה הצדדית)

הנפח: $\boxed{V = \frac{1}{3}a^2H}$
(a - צלע הבסיס, H - גובה הפירמידה)

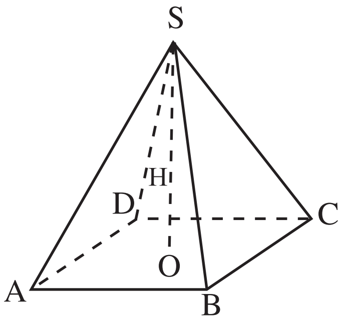


4.58

בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD,
אורך צלע הבסיס שווה ל-5 ס"מ, והזווית בין המקצוע הצדדי לבין מישור הבסיס היא $53°$.
א. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.
ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.
ג. חשב את נפח הפירמידה.
<u>תשובה:</u> א. 53.2 סמ"ר. ב. 78.2 סמ"ר. ג. 39.17 סמ"ק.



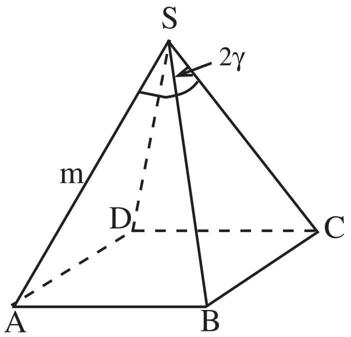
4.59



נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD. גובה הפירמידה הוא H והזווית בין הפאה הצדדית לבין בסיס הפירמידה היא β.
הבע את שטח הפנים של הפירמידה באמצעות H ו-β.

<u>תשובה:</u> $\frac{4H^2(1+\cos\beta)}{\tan\beta\cdot\sin\beta}$.

4.60*

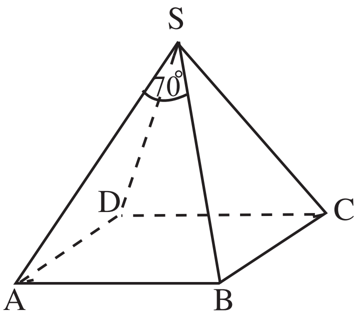


בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD,
נתון: $SA = m$, $\sphericalangle ASC = 2\gamma$.

א. הבע את נפח הפירמידה באמצעות m ו-γ.
ב. הזווית בין הפאה הצדדית של הפירמידה לבין הבסיס היא β. הראה כי: $\tan\beta\cdot\tan\gamma=\sqrt{2}$.

<u>תשובה:</u> א. $\frac{m^3}{3}\sin\gamma\cdot\sin 2\gamma$.

4.61*



נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD.
הזווית בין שני מקצועות צדדיים סמוכים שווה ל-$70°$.

א. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.
ב. חשב את הזווית בין פאה צדדית לבין בסיס הפירמידה.

<u>תשובה:</u> א. $36.39°$. ב. $45.96°$.

4.62*

שטח המעטפת של פירמידה ישרה SABCD, שבסיסה ריבוע ABCD, גדול פי 3 משטח הבסיס.

א. מצא את הזווית שבין שני המקצועות הצדדיים הסמוכים של הפירמידה.
ב. מצא את הזווית שבין שני המקצועות הצדדיים הנגדיים של הפירמידה.

<u>תשובה:</u> א. $36.87°$. ב. $53.13°$.

4.63*

בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD, הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות, שווה ל-$102°$. מצא את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס הפירמידה.

<u>תשובה:</u> $54.1°$.

4.64**

בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD, נתון: $AB=2a$ והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות שווה ל- β.

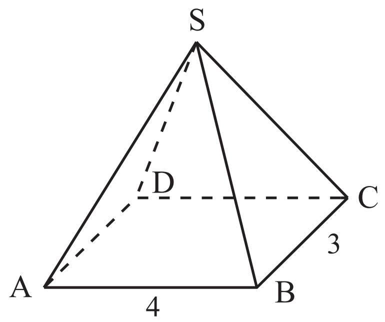
א. הבע את שטח הפנים של הפירמידה באמצעות a ו- β.

ב. באיזה תחום צריכה להימצא β כדי שיהיה פתרון לבעיה?

<u>תשובה:</u> א. $4a^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{-\cos\beta}}\right)$. ב. $90°<\beta<180°$.

פירמידה ישרה שבסיסה מצולע כלשהו

4.65



בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD,

נתון: $AB=4$ ס"מ, $BC=3$ ס"מ;

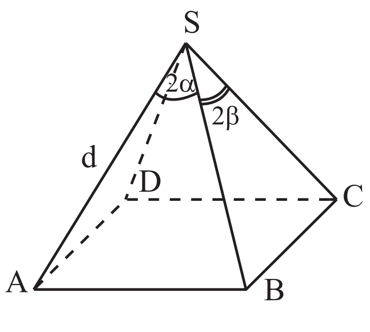
נפח הפירמידה שווה ל- 24 סמ"ק.

א. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

ב. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס הפירמידה.

<u>תשובה:</u> א. 43.68 סמ"ר. ב. $67.38°$.

4.66



בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD,

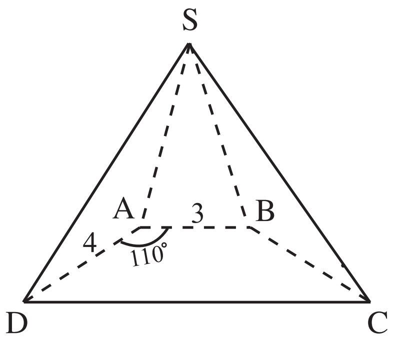
אורך המקצוע הצדדי הוא d;

$\sphericalangle ASB=2\alpha$, $\sphericalangle BSC=2\beta$.

הבע את נפח הפירמידה באמצעות α, β ו- d.

<u>תשובה:</u> $\frac{4}{3}d^3\sin\alpha\sin\beta\cdot\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

4.67



בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה טרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB\parallel CD$), נתון:

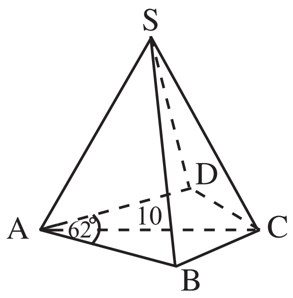
$AB=3$ ס"מ, $AD=4$ ס"מ, $\sphericalangle BAD=110°$;

המקצוע הצדדי של הפירמידה יוצר זווית בת $75°$ עם מישור הבסיס.

חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

<u>תשובה:</u> 11.82 ס"מ.

4.68



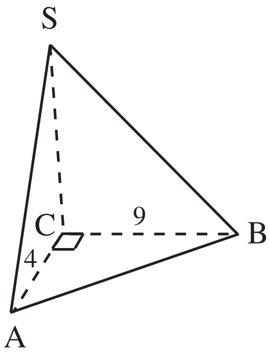
בפירמידה ישרה SABCD שבסיסה דלתון ABCD,
נתון: $\sphericalangle BAD = 62°$, $AC = 10$ ס"מ;
המקצוע הצדדי של הפירמידה
יוצר זווית בת $37°$ עם גובה הפירמידה.
חשב את נפח הפירמידה.
<u>תשובה:</u> 97.7 סמ"ק.

4.69*

בפירמידה ישרה שבסיסה משושה משוכלל, הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים שווה לזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה. חשב את הזווית הנ"ל.
<u>תשובה:</u> $42.94°$.

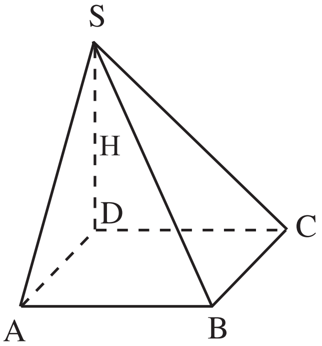
פירמידה לא ישרה

4.70*



בפירמידה SABC שבסיסה $\triangle ABC$ הוא
משולש ישר-זווית $(\sphericalangle ACB = 90°)$,
המקצוע הצדדי SC מאונך למישור הבסיס.
נתון: $AC = 4$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ; הפאה
הצדדית SAB יוצרת זווית בת $65°$ עם מישור הבסיס.
חשב את גובה הפירמידה.
<u>תשובה:</u> 7.83 ס"מ.

4.71*



בפירמידה SABCD הבסיס הוא מלבן ABCD,
הזווית שבין הפאה הצדדית SAB לבין הבסיס היא α.
הזווית שבין הפאה SBC לבין הבסיס היא γ.
המקצוע הצדדי SD שאורכו H, הוא גובה של הפירמידה.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות α, γ ו- H.
<u>תשובה:</u> $\frac{H^3}{3\tan\alpha\tan\gamma}$.

בחלק מן השאלות בנושא פירמידה לא ישרה משתמשים במשפטים הבאים:

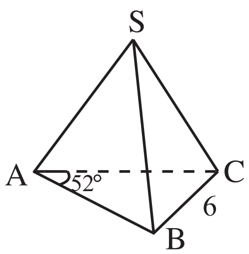
משפט	אם גובה הפירמידה פוגש את הבסיס במרכז המעגל החסום בבסיס, אזי כל הזוויות בין הפאות הצדדיות לבסיס, שוות זו לזו (וגם הגבהים של הפאות הצדדיות שווים זה לזה).

משפט הפוך	אם בפירמידה כל הפאות הצדדיות יוצרות זוויות שוות עם הבסיס, אזי גובה הפירמידה פוגש את הבסיס במרכז המעגל החסום בבסיס הפירמידה.

4.72*

בפירמידה SABC שבסיסה ABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$, נתון: $\sphericalangle BAC = 52°$, $BC = 6$ ס"מ; כל הפאות הצדדיות של הפירמידה יוצרות זווית בת $70°$ עם מישור הבסיס.
חשב את נפח הפירמידה.

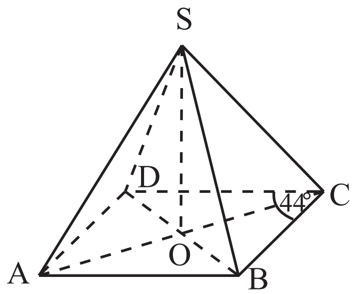
תשובה: 31.61 סמ"ק.



4.73*

בפירמידה SABCD שבסיסה מעוין ABCD, גובה הפירמידה פוגש את הבסיס בנקודת מפגש אלכסוני המעוין. אורך הגובה שווה לאורך האלכסון הגדול במעוין. הזווית החדה של המעוין שווה ל- $44°$.
חשב את הזווית שיוצרת כל אחת מהפאות הצדדיות עם בסיס הפירמידה.

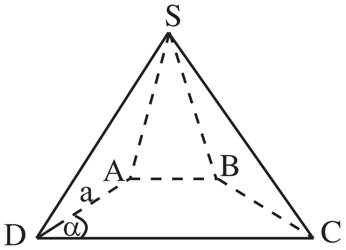
תשובה: $79.38°$.



4.74*

בפירמידה SABCD שבסיסה טרפז שווה-שוקיים ABCD $(AB \parallel CD, AB < CD)$, נתון: $AD = a$, $\sphericalangle ADC = \alpha$;
כל אחת מן הפאות הצדדיות יוצרת זווית β עם מישור הבסיס.
הבע את שטח המעטפת של הפירמידה באמצעות a, α ו- β.

תשובה: $\frac{a^2 \sin\alpha}{\cos\beta}$.

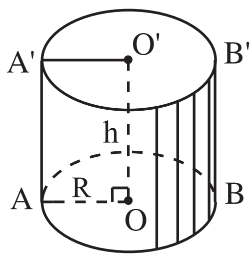


גליל ישר

הגדרה

גליל ישר – גוף הנוצר על-ידי סיבוב המלבן סביב הציר העובר דרך אחת מצלעותיו של המלבן.

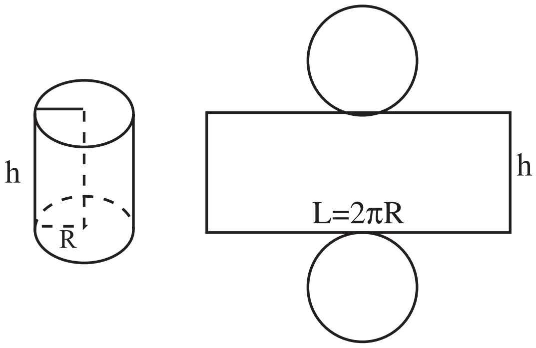
(ראה ציור: הגליל הוא הגוף הנוצר על-ידי סיבוב המלבן $AA'O'O$ סביב הצלע $O'O$.)



ניתן לומר, שגליל ישר הוא גוף המוגבל על-ידי שני עיגולים חופפים ומקבילים, ועל-ידי קטעים שווים, המחברים את שפות העיגולים ומאונכים להם.

* **בסיסי הגליל** – שני העיגולים החופפים והמקבילים.
* **רדיוס הגליל** – רדיוס של בסיס הגליל.
* **גובה הגליל** – אנך המחבר את בסיסי הגליל.
* **קו יוצר של הגליל** – כל קטע המחבר את שפת העיגולים וניצב לעיגולים.
* **החתך הצירי של הגליל** – המישור המאונך לבסיסים ועובר דרך מרכזיהם:
  המישור הנ"ל הוא מלבן שצלע אחת שלו היא קוטר הבסיס, והצלע השנייה היא הקו היוצר של הגליל.

אם נפרוש את המעטפת של הגליל הישר, נקבל מלבן שצלע אחת שלו שווה להיקף מעגל הבסיס, וצלע שנייה שווה לגובה הגליל.



שטח המעטפת של הגליל – שטחו של מלבן הפרישה: $\boxed{M = 2\pi Rh}$

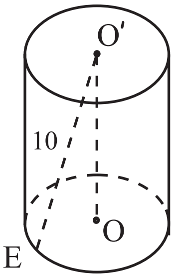
(R – רדיוס הגליל, h – גובה הגליל)

שטח הפנים של הגליל – סכום שטחם של המעטפת ובסיסי הגליל: $\boxed{P = 2\pi Rh + 2\pi R^2}$

נפח הגליל – מכפלת שטח הבסיס בגובה הגליל: $\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$

4.75

בגליל ישר הנקודה O' היא מרכז הבסיס העליון, הנקודה O היא מרכז הבסיס התחתון, E היא נקודה כלשהי על שפת העיגול התחתון. הקטע $O'E$ שאורכו 10ס"מ, יוצר זווית בת $56°$ עם הבסיס התחתון.



א. חשב את שטח המעטפת של הגליל.
ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.
ג. חשב את נפח הגליל.

<u>תשובה:</u> א. 291.16 סמ"ר. ב. 487.5 סמ"ר. ג. 813.82 סמ"ק.

4.76

בגליל ישר שנפחו V, הזווית בין אלכסוני החתך הצירי היא α (α היא הזווית שמול קוטר הבסיס). הבע את גובה הגליל באמצעות V ו- α.

<u>תשובה:</u> $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$

4.77

שטח הבסיס של גליל ישר קטן פי 2 משטח החתך הצירי של הגליל. חשב את הזווית החדה בין אלכסוני החתך הצירי של הגליל.

<u>תשובה:</u> $64.98°$.

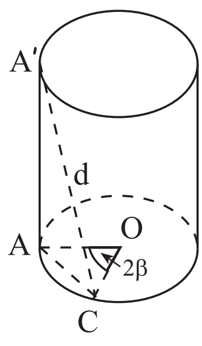
4.78

בגליל ישר, פרישת מעטפת הגליל היא מלבן $AA'C'C$ שבו האלכסון AC' שווה ל- d ו- $\sphericalangle AC'C = \alpha$. הבע את שטח הפנים של הגליל באמצעות d ו- α.

<u>תשובה:</u> $\frac{d^2}{2}\left(\sin 2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\pi}\right)$.

4.79

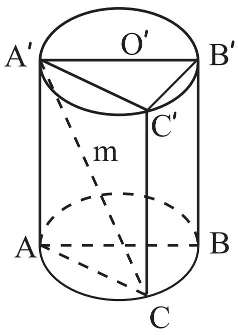
בגליל ישר, הנקודה O היא מרכז הבסיס התחתון;
הנקודה C היא נקודה כלשהי על שפת הבסיס התחתון.
נתון כי הקטע $A'C$ שאורכו d, יוצר זווית α עם הקו היוצר AA', והזווית המרכזית המתאימה למיתר AC היא 2β.
הבע את שטח המעטפת של הגליל באמצעות d, α ו- β.



<u>תשובה:</u> $\frac{\pi d^2\cdot\sin2\alpha}{2\sin\beta}$.

4.80

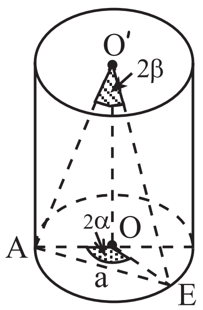
בגליל ישר העבירו מישור $AA'C'C$ המאונך לבסיסים והיוצר זווית α עם החתך הצירי $AA'B'B$ של הגליל.
האלכסון $A'C$ של המלבן $AA'C'C$ שווה ל-m ויוצר זווית β עם מישור הבסיס.
הבע את נפח הגליל באמצעות m, α ו-β.



<u>תשובה:</u> $\frac{\pi m^3 \cdot \cos^2\beta \cdot \sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.

4.81

בגליל ישר הנקודה O' היא מרכז הבסיס העליון והנקודה O היא מרכז הבסיס התחתון. AE הוא מיתר בבסיס התחתון.
נתון: $AE = a$, $\sphericalangle AOE = 2\alpha$, $\sphericalangle AO'E = 2\beta$.
הבע את נפח הגליל באמצעות a, α ו-β.



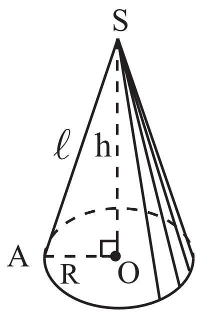
<u>תשובה:</u> $\frac{\pi a^3 \cdot \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{8\sin^3\alpha \sin\beta}$.

חרוט ישר

הגדרה

חרוט ישר – גוף הנוצר על-ידי סיבוב של משולש ישר-זווית סביב הציר העובר דרך אחד מהניצבים של המשולש.

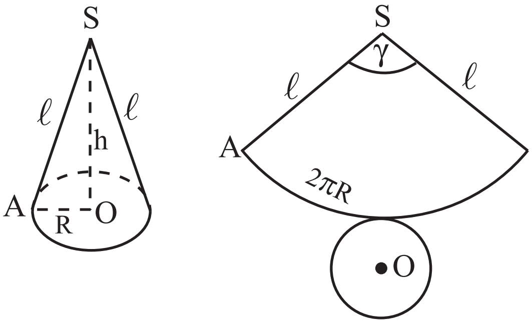
(ראה ציור: החרוט הוא הגוף הנוצר על-ידי סיבוב המשולש ישר-זווית SOA סביב הניצב SO.)



ניתן לומר, שחרוט ישר הוא גוף המוגבל על-ידי עיגול וקטעים שווים, המחברים את שפת העיגול עם נקודה הנמצאת מחוץ למישור העיגול. הקטע המחבר את הנקודה הנ"ל אל מרכז העיגול מאונך למישור העיגול.

* **בסיס החרוט** – העיגול הנ"ל.
* **רדיוס החרוט** – רדיוס של בסיס החרוט.
* **קוים יוצרים של החרוט** – קטעים שווים, המחברים את שפת הבסיס עם נקודה אחת, הנמצאת מחוץ למישור הבסיס.
* **קודקוד החרוט** – הנקודה המשותפת לכל הקווים היוצרים של החרוט.
* **גובה החרוט** – אנך המחבר את הקודקוד עם בסיס החרוט.
* **החתך הצירי של החרוט** – המישור הניצב לבסיס, העובר דרך קוטר הבסיס וקודקוד החרוט. המישור הנ"ל הוא משולש שווה-שוקיים. שוקי המשולש הם הקווים היוצרים של החרוט.

אם נפרוש את המעטפת של החרוט הישר, נקבל גזרת עיגול שהרדיוס שלה שווה לקו היוצר של החרוט ואורך הקשת שלה שווה להיקף הבסיס של החרוט.



שטח המעטפת של החרוט – שטחה של גזרת עיגול הפרישה: $\boxed{M = \pi R\ell}$

(R – רדיוס החרוט, ℓ – קו היוצר של החרוט.)

ניתן למצוא את שטח המעטפת של החרוט גם באמצעות הנוסחה: $\boxed{M = \dfrac{\ell^2 \cdot \gamma}{2}}$

(γ – הזווית המרכזית (ברדיאנים) של גזרת עיגול הפרישה, ℓ – קו היוצר של החרוט.)

שטח הפנים של החרוט – סכום שטחם של המעטפת והבסיס: $\boxed{P = \pi R\ell + \pi R^2}$

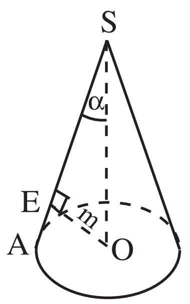
(R – רדיוס החרוט, ℓ – קו היוצר של החרוט.)

נפח החרוט – שליש ממכפלת שטח הבסיס בגובה: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$

(R – רדיוס החרוט, h – גובה החרוט.)

4.82
בחרוט ישר אורך הגובה הוא 7 ס"מ, הזווית בין הקו היוצר לבין הבסיס היא $63°$.
חשב את שטח המעטפת, שטח הפנים, ונפח החרוט.

<u>תשובה:</u> $M =$ 88.11 סמ"ר, $P =$ 128.13 סמ"ר, $V =$ 93.38 סמ"ק.

4.83


בחרוט ישר העלו אנך ממרכז הבסיס לקו היוצר של החרוט.
אורך האנך הוא m. הזווית בין קו היוצר לגובה החרוט היא α.
הבע את נפח החרוט באמצעות m ו- α.

<u>תשובה:</u> $\dfrac{\pi m^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

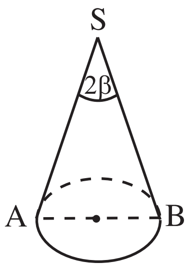
4.84
פרישת המעטפת של חרוט ישר היא גזרה שהזווית המרכזית שלה היא $\dfrac{6\pi}{5}$. שטח המעטפת של החרוט שווה ל- 60π סמ"ר. חשב את שטחו של החתך הצירי של החרוט.

<u>תשובה:</u> 48 סמ"ר.

4.85

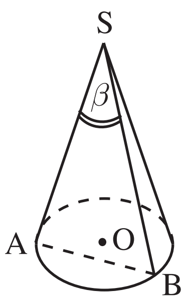
גובהו של חרוט ישר הוא 10ס"מ. הזווית בין גובה החרוט לבין קו היוצר היא $25°$.
חשב את הזווית המרכזית של פרישת המעטפת של החרוט.
<u>תשובה:</u> $0.845\pi = 152.1°$.

4.86



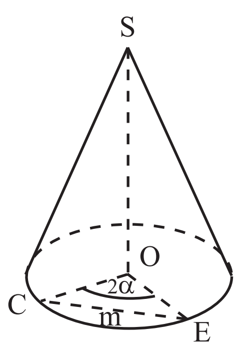
בחרוט ישר, זווית הראש של החתך הצירי היא 2β
והיקפו של החתך הצירי הוא $2b$.
הבע את נפחו של החרוט באמצעות β ו- b.
<u>תשובה:</u> $\frac{\pi b^3 \sin^2\beta\cos\beta}{3(1+\sin\beta)^3}$.

4.87



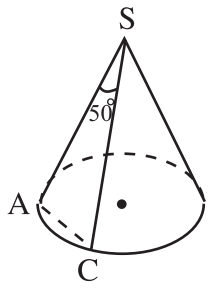
בחרוט ישר שקודקודו S ומרכז בסיסו O, העבירו מיתר AB.
חיברו את S עם הנקודות A ו- B.
נתון: $\sphericalangle ASB = \beta$, הזווית בין קו היוצר לבין בסיס החרוט היא α.
הבע את היחס שבין שטח החתך SAB לבין שטח המעטפת של החרוט באמצעות α ו- β.
<u>תשובה:</u> $\frac{\sin\beta}{2\pi\cos\alpha}$.

4.88



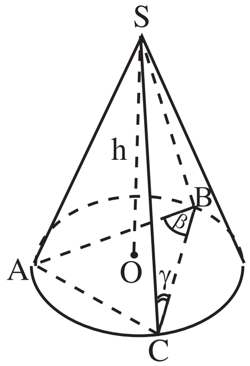
בחרוט ישר שקודקודו S ומרכז בסיסו O,
העבירו מיתר CE שאורכו m. נתון: $\sphericalangle COE = 2\alpha$,
הזווית בין גובה החרוט לקו היוצר היא γ.
הבע את שטח הפנים של החרוט באמצעות m, α ו- γ.
<u>תשובה:</u> $\frac{\pi m^2(1+\sin\gamma)}{4\sin^2\alpha\cdot\sin\gamma}$.

4.89



SA ו- SC הם שני קוים יוצרים בחרוט ישר.
נתון: $\sphericalangle ASC = 50^\circ$, הזווית בין מישור החתך SAC
לבין בסיס החרוט היא 61°, רדיוס הבסיס הוא 5 ס"מ.
א. חשב את אורכו של הקו היוצר.
ב. חשב את נפח החרוט.
<u>תשובה:</u> א. 8.22 ס"מ. ב. 170.61 סמ"ק.

4.90*



נתון חרוט ישר שקודקודו S ומרכז בסיסו O.
בבסיס החרוט חסום משולש שווה-שוקיים
ABC $(AB = AC)$. את קודקוד החרוט S
חיברו עם הנקודות A, B ו- C.
נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle SC\beta = \gamma$, גובה החרוט הוא h.
הבע את רדיוס החרוט באמצעות h, β ו- γ.
<u>תשובה:</u> $\dfrac{h\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2 2\beta - \cos^2\gamma}}$.

4.91*

בחרוט ישר, מכפלת שטח הבסיס בשטח הפנים, שווה לריבוע של שטח המעטפת.
חשב את הזווית בין הקו היוצר לבסיסו של החרוט.
<u>תשובה:</u> 51.83°.